

Matrices et Systèmes Linéaires 1

(Syllabus Chapitre XV, partie 1 jusqu'à 1.3.2)

Contenu de la section

Introduction

Que sont les matrices?

Les **matrices** sont juste ... des tableaux de nombres. (Qu'on utilise d'une certaine certaine manière, bien sûr!)

Définition rigoureuse

Définition

Soient deux entiers naturels $m \geq 1$ et $n \geq 1$. Une *matrice réelle de taille $m \times n$* est un tableau rectangulaire ayant m lignes et n colonnes. On le note entre parenthèses.

Attention à l'ordre des indices: $m \times n$ désigne toujours m lignes et n colonnes.

Exemple

Ceci sont des matrices :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ \pi & -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, (0 \ 0 \ 0), \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ e + \pi \end{pmatrix}, (-\pi) \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \dots$$

Définition

Pour une matrice M de taille $m \times n$:

- ▶ Si $n = 1$, la matrice est appelée *matrice-colonne* (c'est juste une colonne avec m entrées);
- ▶ si par contre $m = 1$, la matrice est appelée *matrice-ligne*;
- ▶ si enfin $m = n$, la matrice est appelée *matrice carrée*;
- ▶ le nombre réel se trouvant à l'intersection de la i -eme ligne et de la j -eme colonne de la matrice est noté M_{ij} . Les M_{ij} sont appelés *composantes (ou éléments) de la matrice M* ;
- ▶ on note $\text{Mat}(m, n)$ ou $\mathbb{R}^{m \times n}$ l'ensemble des matrices $m \times n$.

Exemple

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad (1 \quad 2 \quad 3), \quad \begin{pmatrix} M_{11} & \dots & M_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{m1} & \dots & M_{mn} \end{pmatrix}$$

égalité de matrices

Définition

Deux matrices M et N sont égales si elles ont la même taille, disons $m \times n$, et les mêmes éléments :

$$M = N \iff M_{ij} = N_{ij} \quad \forall i = 1, \dots, m \text{ et } \forall j = 1, \dots, n$$

Contenu de la section

Opérations sur les matrices

Contenu de la section

Opérations sur les matrices

Somme

Produit par un scalaire

Produit Matriciel

Matrice identité

Déterminant d'une matrice carrée

Transposition

Somme de deux matrices

Définition

Si M et N sont deux matrices **de même taille $m \times n$** , leur somme $M + N$ est la matrice **$m \times n$** dont les éléments sont les $M_{ij} + N_{ij}$. Autrement dit:

$$(M + N)_{ij} = M_{ij} + N_{ij}.$$

La somme a encore **la même taille que M et que N** !

Exemple

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \sqrt{2} & \pi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 + \sqrt{2} & \pi \end{pmatrix}$$

Pour sommer deux matrices, on somme leurs composantes terme à terme.

Matrice nulle

Définition

Une matrice constituée uniquement de 0 est appelée *matrice nulle*. On la note parfois 0, ou $0_{m \times n}$ pour indiquer sa taille.

Résultat

La matrice nulle est *neutre* dans l'addition matricielle: pour toute matrice M de taille $m \times n$,

$$M + 0_{m \times n} = 0_{m \times n} + M = M.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Contenu de la section

Opérations sur les matrices

Somme

Produit par un scalaire

Produit Matriciel

Matrice identité

Déterminant d'une matrice carrée

Transposition

Produit d'une matrice par un scalaire (ou nombre réel)

Définition

Si $\lambda \in \mathbb{R}$, et M est une matrice $m \times n$, le produit λM est une matrice de taille $m \times n$ dont les coefficients sont :

$$(\lambda M)_{ij} = \lambda M_{ij}.$$

pour des indices $1 \leq i \leq m$ et $1 \leq j \leq n$.

Exemple

$$5 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -5 & 15 \end{pmatrix}$$

Pour multiplier une matrice par un réel, on multiplie toutes les composantes de la matrice par ce réel.

Contenu de la section

Opérations sur les matrices

Somme

Produit par un scalaire

Produit Matriciel

Matrice identité

Déterminant d'une matrice carrée

Transposition

Produit matriciel

Définition

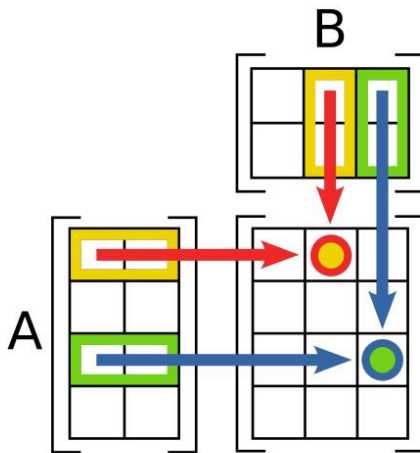
Si M est une matrice de taille $m \times n$ et N une matrice de taille $n \times p$, on définit leur produit matriciel MN comme la matrice **de taille $m \times p$** dont les composantes sont données par:

$$(MN)_{ik} = \sum_{j=1}^n M_{ij} N_{jk} \quad \forall i = 1, \dots, m; k = 1, \dots, p.$$

Attention à la compatibilité des tailles!

Contrairement à ce qui se passe pour la somme et le produit par un scalaire, les composantes du produit de deux matrices **ne sont pas juste le produit des composantes!** Ce produit est parfois appelé le produit “ligne par colonne”.

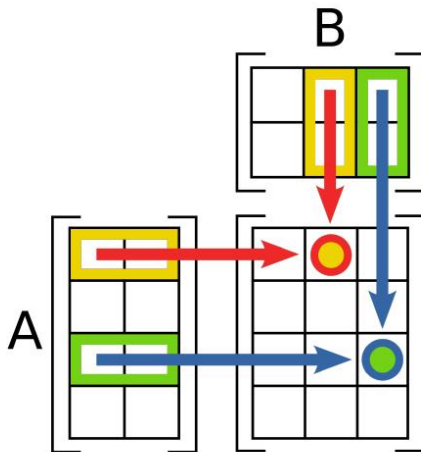
Illustration



A est une matrice 4×2 et B une matrice 2×3 . Alors:

$$(AB)_{12} = \sum_{j=1}^2 A_{1j}B_{j2} = A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22}$$

Illustration



$$(AB)_{33} = \sum_{j=1}^2 A_{3j}B_{j3} = A_{31}B_{13} + A_{32}B_{23}$$

Un exemple

On va calculer le produit matriciel des matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \sqrt{2} & \pi \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \pi \\ 0 & 3 & \sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Réponse

Par définition du produit matriciel,

$$\begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix} 0 \times 1 + 1 \times 0 & 0 \times 0 + 1 \times 3 & 0 \times \pi + 1 \times \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \times 1 + \pi \times 0 & \sqrt{2} \times 0 + \pi \times 3 & \sqrt{2} \times \pi + \pi \times \sqrt{2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 3 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 3\pi & 2\sqrt{2}\pi \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Attention: on peut calculer AB , mais **on ne pourrait pas calculer BA car les tailles ne sont pas compatibles**. Dans le produit matriciel, l'ordre est essentiel.

Contenu de la section

Opérations sur les matrices

Somme

Produit par un scalaire

Produit Matriciel

Matrice identité

Déterminant d'une matrice carrée

Transposition

Matrice identité

Définition

Une matrice carrée de taille $n \times n$ possédant des 0 partout, sauf sur la diagonale où il n'y a que des 1 est appelée *matrice identité*.
On la note généralement I ou I_n .

Exemple

Les matrices identité 2×2 et 3×3 sont :

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La matrice identité est un élément neutre pour le produit des matrices:

Résultat

Si M est une matrice de taille $m \times n$, alors :

$$MI_n = M = I_m M.$$

Remarquez qu'on a multiplié par une matrice identité différente à gauche et à droite! (Il faut respecter les tailles dans le produit matriciel).

Exemple

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Multiplier des matrices de même taille

Remarque

Le produit de deux matrices carrées de taille $n \times n$ est encore une matrice carrée de taille $n \times n$.

Remarque

Attention, le produit matriciel est très différent du produit de nombres réels:

- ▶ le produit MN n'est en général pas égal au produit NM
- ▶ certaines matrices n'ont pas d'inverse.

Contenu de la section

Opérations sur les matrices

Somme

Produit par un scalaire

Produit Matriciel

Matrice identité

Déterminant d'une matrice carrée

Transposition

Le déterminant

À toute matrice **carrée** (peu importe sa taille) nous allons associer un nombre réel, appelé **le déterminant**, qu'on va définir dans un instant.

Ce nombre permettra d'obtenir de nombreuses informations sur la matrice (notamment sur l'existence d'un inverse, on verra ça dans les prochains cours).

Définition

- ▶ Si $n = 1$: Le déterminant d'une matrice 1×1 est égal au seul nombre de la matrice: $\det M = M_{11}$.
- ▶ Si $n \geq 2$: Le déterminant d'une matrice M de taille $n \times n$ est défini par récurrence de la manière suivante :
 1. On choisit une rangée: ligne ou colonne, peu importe laquelle.
 2. Pour chaque élément M_{ij} de la rangée on calcule le déterminant de la matrice obtenue en enlevant la i -ième ligne et la j -ième colonne de M , qui est de taille $(n-1) \times (n-1)$. On note D_{ij} ce déterminant.
 3. Le déterminant de M est la somme tous les produits $(-1)^{i+j} M_{ij} D_{ij}$ lorsqu'on parcourt la rangée:

$$\det M = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} M_{ij} D_{ij} = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} M_{ij} D_{ij}.$$

Ca ne dépend pas de la rangée choisie.

Déterminant des matrices 2×2

Pour une matrice 2×2 ,

$$\det M = \sum_{i=1}^2 (-1)^{i+j} M_{ij} D_{ij}.$$

Exemple

Considérons la matrice , et développons selon la première colonne

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} 1 |4| + (-1)^{2+1} 2 |-3| = 1 \cdot 4 - 2 \cdot (-3) = 10$$

Remarque

Dans le cas des matrices 2×2 , le même calcul que celui qu'on vient de faire donne une formule générale à **retenir**:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

“La diagonale descendante moins la diagonale montante !”

Notation

Définition

Le déterminant d'une matrice de taille $n \times n$ $\begin{pmatrix} M_{11} & \dots & M_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{n1} & \dots & M_{nn} \end{pmatrix}$ se note

$$\begin{vmatrix} M_{11} & \dots & M_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{n1} & \dots & M_{nn} \end{vmatrix}.$$

Remarque

Pour calculer un déterminant, en général, on va chercher à développer selon les rangées où il y a autant de 0 que possible afin de diminuer les calculs.

Exemple

Développons le déterminant 3×3 suivant selon la seconde colonne.

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (-1)^{1+2} 3 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} + (-1)^{2+2} 0 \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \\ + (-1)^{3+2} 1 \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ = -3 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} + 0 - \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ = -3(-2 - 0) - (1 - 10) = 6 + 9 = 15.$$

Les signes dans le cas général

Rappel

$$\det M = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} M_{ij} D_{ij} = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} M_{ij} D_{ij}$$

Le signe attribué **alterne d'un élément au suivant**, il est donc facile de s'en rappeler par le schéma suivant :

$$\begin{pmatrix} + & - & + & \cdots \\ - & + & - & \\ + & - & + & \\ \vdots & & & \ddots \end{pmatrix}$$

Contenu de la section

Opérations sur les matrices

Somme

Produit par un scalaire

Produit Matriciel

Matrice identité

Déterminant d'une matrice carrée

Transposition

Transposée d'une matrice

Définition

La *transposée* d'une matrice M de taille $m \times n$ est la matrice de taille $n \times m$, notée tM , vérifiant :

$$({}^tM)_{ij} = M_{ji}$$

Exemple

La transposée de ... est ...

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a & d \\ b & e \\ c & f \end{pmatrix}.$$

Transposée, produit et déterminant

Résultat

Si $A \in \text{Mat}(m, n)$ et $B \in \text{Mat}(n, p)$, alors :

$${}^t(AB) = {}^tB {}^tA$$

Attention à bien **inverser l'ordre du produit**! Car tA est de taille $n \times m$ et tB est de taille $p \times n$, donc **on ne peut pas les multiplier**.

Résultat

Si A est une matrice carrée de taille $n \times n$, on a

$$\det({}^tA) = \det(A).$$

Les matrices sont omniprésentes dans tous les domaines des sciences et leur utilisation est fondamentale pour:

- ▶ Résoudre des systèmes d'équations linéaires
- ▶ Construire des modèles de probabilité
- ▶ Résoudre numériquement des systèmes d'équations différentielles (modéliser la coque d'un bateau, etc...)
- ▶ Construire des algorithmes de page-ranking (cherchez sur internet "Matrice de G^ogle")
- ▶ Améliorer les méthodes de traitement d'image
- ▶ Et bien plus encore...