

Matrices et Systèmes linéaires

II

(Syllabus Chapitre XV, fin de la partie 1 et partie 2)

Contenu de la section

Opérations sur les matrices (suite)

Contenu de la section

Opérations sur les matrices (suite)

Transposition, Inverse, Trace

Propriétés des opérations sur les matrices

Déterminant d'une matrice triangulaire

Déterminant et opérations

Inverse d'une matrice

Définition

Une matrice **carrée** A est dite **inversible** si il existe une matrice B de même taille telle que

$$AB = BA = I$$

La matrice B est appelée **l'inverse de A** , et on note $B = A^{-1}$.

Résultat

L'inverse de A est unique.

Preuve

Si B et C sont deux inverses de A , alors $AC = I$ et $BA = I$ donc

$$B = BI = BAC = IC = C$$

Exemple

La matrice identité I_3 est elle-même sa propre inverse

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

C'est vrai pour toutes les matrices identité I_n , $\forall n \geq 1$.

La matrice identité est un exemple de matrice diagonale: c'est une matrice dont tous les coefficients sont nuls sauf ceux sur la diagonale (qui peuvent être tous différents).

Remarque

Si D et E sont des matrices diagonales, leur produit est encore une matrice diagonale.

$$\begin{pmatrix} D_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & D_{22} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & D_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & E_{22} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & E_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_{11}E_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & D_{22}E_{22} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & D_{nn}E_{nn} \end{pmatrix}$$

Résultat

Si $D_{11}, \dots, D_{nn}$ sont *non-nuls*, l'inverse de

$$D = \begin{pmatrix} D_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & D_{22} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & D_{nn} \end{pmatrix} \text{ est } \begin{pmatrix} D_{11}^{-1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & D_{22}^{-1} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & D_{nn}^{-1} \end{pmatrix}$$

Si l'un des coefficients diagonaux de D est nul, alors D *n'est pas inversible*.

Trace d'une matrice

Définition

La *trace* d'une matrice carrée M est la somme de ses éléments diagonaux :

$$\text{Tr}(M) = M_{11} + \cdots + M_{nn}$$

où $n \times n$ est la taille de la matrice.

Exemple

$$\text{Tr}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = 5$$

Contenu de la section

Opérations sur les matrices (suite)

Transposition, Inverse, Trace

Propriétés des opérations sur les matrices

Déterminant d'une matrice triangulaire

Déterminant et opérations

Somme et produit

Résultat

Si $A, D \in \text{Mat}(m, n)$, $B, C \in \text{Mat}(n, p)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors:

- ▶ $A(B + C) = AB + AC$
- ▶ $(A + D)B = AB + DB$
- ▶ $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$

Trace, somme et produit

Résultat

Si A, B sont des matrices carrées de même taille, si $\lambda \in \mathbb{R}$, alors

$$\text{Tr}(A + B) = \text{Tr} A + \text{Tr} B$$

$$\text{Tr}(\lambda A) = \lambda \text{Tr}(A)$$

$$\text{Tr}({}^t(A)) = \text{Tr}(A)$$

$$\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$$

Exemple

Attention, la trace du produit n'est pas égale au produit des traces :

$$\text{Tr}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \text{Tr}\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = 0,$$

alors que

$$\text{Tr}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \text{Tr}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1.$$

Inverse, produit et transposée

Résultat

Si A, B sont des matrices inversibles de même taille, alors

- ▶ $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
- ▶ $(A^{-1})^{-1} = A$
- ▶ $({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$

Comme pour la transposée, on inverse l'ordre des matrices quand on prend l'inverse d'un produit.

Preuve

Pour la première égalité, calculons :

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = ABB^{-1}A^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1} = I$$

De même pour $(B^{-1}A^{-1})(AB) = I$. Les autres inégalités sont laissées en exercice.

Contenu de la section

Opérations sur les matrices (suite)

Transposition, Inverse, Trace

Propriétés des opérations sur les matrices

Déterminant d'une matrice triangulaire

Déterminant et opérations

Un calcul pour se remettre en jambe

On va calculer $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}$.

En développant (par exemple) par rapport à la dernière colonne:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} = (-1)^{3+3} 6 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 6 \times 1 \times 3 = 18.$$

Cette matrice est un exemple de **matrice triangulaire**: une matrice dont tous les éléments au-dessus (ou au-dessous) de la diagonale sont nuls. Ce même calcul reste vrai **pour toute matrice triangulaire**:

Résultat

Le déterminant d'une matrice triangulaire est le produit de ses coefficients sur la diagonale.

En particulier, le déterminant de la matrice identité I_n vaut 1.

Contenu de la section

Opérations sur les matrices (suite)

Transposition, Inverse, Trace

Propriétés des opérations sur les matrices

Déterminant d'une matrice triangulaire

Déterminant et opérations

Déterminant et opérations

Résultat

Le déterminant d'un produit de deux matrices carrées de même taille est le produit des déterminants :

$$\det(AB) = \det(A) \det(B).$$

En particulier, le déterminant de l'inverse est l'inverse du déterminant (si $\det A \neq 0$):

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}.$$

Remarque

En revanche, le déterminant d'une somme *n'est pas la somme des déterminants !*

Résultat

*Une matrice carrée A de taille $n \times n$ est **inversible** si et seulement si $\det A \neq 0$.*

Comment calculer rapidement un déterminant en général?

Généralement, une matrice n'est pas triangulaire. Et elle peut être **de très grande taille**. Le calcul du déterminant en développant selon une ligne ou une colonne peut donc être long et compliqué.

On va voir une autre méthode pour calculer le déterminant. Elle se base sur le fait qu'on peut **appliquer certaines opérations à une matrice donnée** – par exemple **sommer deux de ses lignes** – sans changer la valeur du déterminant.

L'idée sera alors d'appliquer un certain nombre de ces transformations pour **simplifier la matrice au maximum** et se ramener à un cas où le déterminant est simple.

Opérations sur une matrice et déterminant

Si M est une matrice, son déterminant **ne varie pas** lorsque

- ▶ nous **ajoutons** à l'une des lignes une combinaison linéaire des autres lignes
- ▶ nous **ajoutons** à l'une des colonnes une combinaison linéaire des autres colonnes

Si $L_1, \dots, L_n$ représentent les lignes de la matrice M (chacune d'entre elles est donc une matrice-ligne), nous appelons **combinaison linéaire de $L_1, \dots, L_n$** la matrice-ligne suivante:

$$\lambda_1 L_1 + \dots + \lambda_n L_n,$$

où $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont des nombres réels quelconques.

Opérations sur une matrice et déterminant

En revanche, son déterminant **change de signe** lorsque:

- ▶ nous échangeons deux lignes entre elles
- ▶ nous échangeons deux colonnes entre elles

Avec ces manipulations on peut transformer la matrice, en sommant à une ligne ou à une colonne une autre ligne ou colonne multipliée par un nombre réel, sans changer le déterminant.

L'intérêt est de faire apparaître **des lignes ou des colonnes contenant beaucoup de 0**, pour ensuite calculer facilement le déterminant.

Exemple

Ici nous remplaçons la première colonne C_1 par $C_1 - 2C_2$.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 6 & 3 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \end{vmatrix} = -3 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = -9.$$

Cette matrice est en particulier **inversible**.

Attention, on n'a pas remplacé la première colonne C_1 par $-2C_2$, mais bien par $C_1 - 2C_2$: on **ajoute** à une colonne (ou ligne) une combinaison linéaire des autres colonnes (ou lignes).

Contenu de la section

Systèmes linéaires

Calculer le déterminant et l'inverse d'une matrice sert en particulier à résoudre des équations.

Définition

- ▶ Une équation est une égalité faisant intervenir des quantités inconnues.
- ▶ Un *système d'équations* est une liste d'équations faisant intervenir des quantités inconnues (généralement nommées $x_1, \dots, x_n$).
- ▶ Une *solution* d'un système d'équations est un élément $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ de $\mathbb{R}^n$ tel que chaque égalité est vérifiée.
- ▶ Le système est *linéaire* si chaque équation est *polynomiale de degré 1 en chacune des inconnues*.

Exemple

Le système:

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

est un système linéaire.

Exemple

Une équation de plan dans $\mathbb{R}^3$:

$$ax + by + cz + d = 0$$

est un exemple d'équation linéaire (c'est donc aussi un système).

Systèmes linéaires

Un système linéaire de k équations avec n inconnues $(x_1, \dots, x_n)$ peut s'écrire de manière générale sous la forme :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \cdots + a_{kn}x_n = b_k \end{cases}$$

où les a_{ij} et b_i sont des constantes (c'est-à-dire ne dépendent pas des inconnues).

Systèmes linéaires comme produit de matrices

On peut écrire un tel système linéaire sous la forme

$$A \vec{x} = \vec{b}.$$

où $A \in \mathbb{R}^{k \times n}$ est une matrice $k \times n$, $\vec{b} \in \mathbb{R}^{k \times 1}$ est une matrice-colonne donnée, et $\vec{x} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ est la matrice-colonne des inconnues :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \end{pmatrix} \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_k \end{pmatrix}$$

Ceci car quand on calcule le produit matriciel entre A ($k \times n$) et $\vec{x}$ ($n \times 1$) on obtient une matrice de taille $k \times 1$ qui vaut:

$$A \vec{x} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{kn}x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_k \end{pmatrix}$$

Contenu de la section

Systèmes linéaires

Méthode du pivot de Gauß

Un exemple de la méthode

Comment résoudre un système linéaire? I

On considère d'abord un système **carré**, qui s'écrit:

$$A\vec{x} = \vec{b},$$

où A est une matrice **carrée** $n \times n$ et $\vec{x}$ et $\vec{b}$ sont des matrices-colonne $n \times 1$.

On commence par le cas très simple où A est la **matrice identité** I_n .

Alors le système s'écrit:

$$A\vec{x} = I_n\vec{x} = \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

C'est-à-dire que le système **est automatiquement résolu**: les valeurs des inconnues sont $x_1 = b_1, \dots, x_n = b_n$.

Comment résoudre un système linéaire? II

On regarde maintenant le système général d'inconnue $\vec{x} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$:

$$A\vec{x} = \vec{b}.$$

(A n'est plus forcément carrée!) On l'écrit sous forme *d'une matrice augmentée*, où chaque ligne représente une équation du système :

$$\left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{kn} & b_k \end{array} \right]$$

Comment résoudre un système linéaire? II

Les opérations suivantes sur cette nouvelle matrice “augmentée” **ne changent pas les solutions du système** :

- ▶ Multiplier (ou diviser) une ligne par un réel non-nul ;
- ▶ échanger plusieurs lignes entre elles ;
- ▶ Ajouter (ou retrancher) une combinaison linéaire des autres lignes à une ligne donnée.

On va alors utiliser toutes ces opérations pour résoudre un système linéaire donné: cette méthode s'appelle **le pivot de Gauss**.

Contenu de la section

Systèmes linéaires

Méthode du pivot de Gauß

Un exemple de la méthode

Un exemple concret

Trouvons les solutions du système :

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + 2y + 3z = 0 \\ 2x - y = \pi \end{cases}$$

Ce système s'écrit encore

$$A\vec{x} = \vec{b},$$

où

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \pi \end{pmatrix}.$$

La **matrice augmentée** du système est donc:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & \pi \end{array} \right]$$

On sélectionne un élément (en général sur la diagonale) qui nous servira à annuler d'autres entrées de la matrice: ce qu'on appelle un **pivot**.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & \pi \end{array} \right]$$

- ▶ On remplace L_2 par $L_2 - L_1$
- ▶ On remplace L_3 par $L_3 - 2L_1$

ce qui donne

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & -2 & \pi - 2 \end{array} \right].$$

Attention: à chaque étape il faut bien penser à aussi appliquer les opérations qu'on fait sur la matrice A au vecteur $\vec{b}$! (D'où l'intérêt d'écrire la matrice comme "augmentée").

Nous choisissons le pivot suivant, toujours sur la diagonale, et recommençons :

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 2 & -1 \\ 0 & -3 & -2 & \pi - 2 \end{array} \right].$$

- On remplace L_3 par $L_3 + 3L_2$. À cet instant, la matrice est devenue **triangulaire**:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & \pi - 5 \end{array} \right].$$

- On continue à la transformer en l'identité: on remplace L_1 par $L_1 - L_2$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & \boxed{1} & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & \pi - 5 \end{array} \right].$$

On va maintenant faire disparaître les deux premiers éléments de la troisième colonne de la matrice.

Le pivot suivant vaut 4 et pas 1, alors nous divisons d'abord la troisième ligne par 4 :

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{\pi-5}{4} \end{array} \right].$$

Puis nous appliquons encore la même technique pour arriver à la matrice identité :

$$\blacktriangleright L_1 \leftarrow L_1 + L_3$$

$$\blacktriangleright L_2 \leftarrow L_2 - 2L_3$$

Il reste bien:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{\pi+3}{4} \\ 0 & 1 & 0 & -1 - \frac{\pi-5}{2} \\ 0 & 0 & \boxed{1} & \frac{\pi-5}{4} \end{array} \right].$$

Le système de départ possède donc les mêmes solutions que le système représenté par

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{\pi+3}{4} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3-\pi}{2} \\ 0 & 0 & \boxed{1} & \frac{\pi-5}{4} \end{array} \right].$$

c'est-à-dire

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \frac{\pi+3}{4} \\ y = \frac{3-\pi}{2} \\ z = \frac{\pi-5}{4} \end{array} \right.$$

Pour résumer: la méthode du pivot de Gauss

Cette méthode s'appelle **le pivot de Gauss**. L'idée de la méthode est la suivante: en partant de la matrice augmentée du système, on va enchaîner autant de transformations que nécessaire pour obtenir **une matrice qui sera devenue la matrice identité**.

C'est la même idée que le calcul rapide du déterminant d'une matrice.

Car ceci **ne change pas** les solutions du système, qu'on pourra lire directement comme dans l'exemple précédent de la matrice identité.

Résultat

*On peut résoudre de cette manière **n'importe quel système linéaire!***