

Matrices et Systèmes linéaires

3

(Syllabus Chapitre XV, fin de la partie 2 à fin du chapitre)

Contenu de la section

Systèmes Linéaires (suite)

Contenu de la section

Systèmes Linéaires (suite)

D'autres exemples du pivot de Gauss

Inversion de matrices carrées avec le pivot de Gauss

Un exemple

Considérons le système

$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ x+z=4 \\ y+z=2 \end{cases}$$

Il est représenté par la matrice augmentée:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right]$$

On commence par remplacer L_2 par $L_2 - L_1$: il vient

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right].$$

On continue ensuite la méthode du pivot de Gauss.

En remplaçant L_3 par $L_3 + L_2$ on trouve:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{array} \right]$$

On multiplie ensuite la deuxième ligne par -1 et on remplace L_1 par $L_1 - L_2$ puis L_1 par $L_1 - L_3$:

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{array} \right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{array} \right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{array} \right]$$

Les solutions du système sont dès lors:

$$x = -2, \quad y = -4, \quad z = 6.$$

Un autre exemple

Supposons maintenant que le système soit donné par

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array} \right]$$

Pas de pivot en ligne 2, colonne 2 ? Tant pis ! On divise L_2 par 4 et on utilise le coefficient non nul comme pivot. En faisant ensuite

$L_3 \rightarrow L_3 - 2L_2$ puis $L_1 \rightarrow L_1 - L_2$ il vient:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Dès lors le système devient :

$$\begin{cases} x + y = -1 \\ z = 1 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = -1 \\ z = 1 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Ce système est particulier : la troisième équation est toujours vérifiée.

On n'a donc en réalité que deux équations pour trois inconnues. Il y a ici une *infinité* de solutions.

Les solutions sont tous les triplets de points de la forme

$$(x, -1 - x, 1), \quad \text{avec } x \in \mathbb{R}.$$

(ou $(-1 - y, y, 1)$ avec $y \in \mathbb{R}$, c'est équivalent !).

Types de solutions des systèmes linéaires:

- ▶ Une solution unique
- ▶ Une infinité de solutions
- ▶ Aucune solution

Contenu de la section

Systèmes Linéaires (suite)

D'autres exemples du pivot de Gauss

Inversion de matrices carrées avec le pivot de Gauss

Opérations comme produits matriciels

Faisons un calcul en apparence naïf:

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a & \lambda b & \lambda c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

Ce calcul montre qu'une des opérations qu'on a appliquées dans la méthode du pivot de Gauss, c'est-à-dire multiplier la première ligne de la matrice par un réel λ ... peut en fait s'obtenir **comme un produit matriciel**.

Pour multiplier la première **ligne** d'une matrice par λ , il suffit de multiplier cette matrice **à gauche** par la matrice

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Opérations comme produits matriciels II

De la même manière, échanger les lignes s'obtient aussi en multipliant par une matrice à gauche :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & e & f \\ a & b & c \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

Et rajouter à une ligne une combinaison linéaire d'autres lignes aussi:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \lambda & 1 & \mu \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d + \lambda a + \mu g & e + \lambda b + \mu h & f + \lambda c + \mu i \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

Ici on a remplacé L_2 par $L_2 + \lambda L_1 + \mu L_3$.

Inversion de matrices carrées avec le pivot de Gauss

Ainsi: les opérations **sur les lignes** utilisées dans la méthode du pivot de Gauss pour résoudre un système linéaire **sont des produits matriciels**. On en déduit une méthode pour inverser une matrice carrée:

- ▶ Partant d'une matrice **carrée** M , supposons avoir effectué une suite d'opérations **sur les lignes uniquement** transformant M en la matrice identité.
- ▶ Notons les matrices associées à ces opérations : $P_1, P_2, P_3, \dots, P_k$. (P_k est la dernière opération effectuée.)
- ▶ Ceci signifie que : $P_k \cdots P_2 P_1 M = I$.
- ▶ Et donc que $P_k \cdots P_2 P_1 = M^{-1}$!
- ▶ Comme $P_k \cdots P_2 P_1 = P_k \cdots P_2 P_1 I$, il suffit **d'appliquer la séquence d'opérations à la matrice identité elle-même** pour avoir l'inverse de M .

Un exemple concret

Cherchons à inverser la matrice suivante :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Nous écrivons la matrice **augmentée de l'identité** :

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

Et appliquons la méthode du pivot, en prenant soin d'appliquer **simultanément à M et à I_3** toutes les opérations qu'on effectue:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & 4 & -3 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$\begin{array}{l}
 \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & 4 & -3 & 0 & 1 \end{array} \right] \xRightarrow{\substack{L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 6L_2}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & -3 & 6 & 1 \end{array} \right] \\
 \xRightarrow{L_3 \leftarrow -\frac{1}{8}L_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & \frac{3}{8} & -\frac{3}{4} & -\frac{1}{8} \end{array} \right] \xRightarrow{L_1 \leftarrow L_1 - 3L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 + 2L_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{-1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{3}{8} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{8} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{8} & -\frac{3}{4} & -\frac{1}{8} \end{array} \right]
 \end{array}$$

L'inverse de la matrice M est alors ce que la matrice identité "augmentée" est devenue à la fin de toutes ces opérations, c'est-à-dire:

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{3}{8} \\ \frac{3}{8} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ \frac{3}{8} & -\frac{3}{4} & -\frac{1}{8} \end{pmatrix}$$

Un autre exemple

On considère la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

M est-elle inversible? On calcule son déterminant pour le savoir.

En remplaçant par exemple L_3 par $L_3 + 3L_2$ il vient:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 10 & 4 \end{vmatrix} = (-1)^{1+2} \cdot (-1) \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 10 & 4 \end{vmatrix} = 24.$$

Le déterminant de cette matrice est non nul, donc elle est bien inversible.

Maintenant qu'on sait qu'elle est inversible, on va calculer l'inverse de la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Comme avant, nous écrivons la matrice **augmentée de l'identité** :

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

et appliquons la méthode du pivot. On cherche à transformer M en l'identité par des transformations **sur des lignes** en prenant soin d'appliquer **simultanément à M et à I_3** toutes les opérations qu'on effectue:

On commence par multiplier la deuxième ligne par -1 puis par échanger les deux premières lignes:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

Puis on remplace L_3 par $L_3 - 3L_1$:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & -2 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 4 & 0 & 3 & 1 \end{array} \right]$$

et enfin L_3 par $L_3 - 10L_2$:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 4 & 0 & 3 & 1 \end{array} \right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 24 & -10 & 3 & 1 \end{array} \right]$$

On remplace ensuite L_1 par $L_1 + 2L_2$ puis on divise la dernière ligne par 24:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 24 & -10 & 3 & 1 \end{array} \right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -5 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{5}{12} & \frac{1}{8} & \frac{1}{24} \end{array} \right]$$

Il reste enfin à remplacer L_2 par $L_2 + 2L_3$ et L_1 par $L_1 + 5L_3$ pour

trouver:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -5 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{5}{12} & \frac{1}{8} & \frac{1}{24} \end{array} \right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{12} & -\frac{3}{8} & \frac{5}{24} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{4} & \frac{1}{12} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{5}{12} & \frac{1}{8} & \frac{1}{24} \end{array} \right]$$

L'inverse de la matrice de départ est donc:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{12} & -\frac{3}{8} & \frac{5}{24} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{4} & \frac{1}{12} \\ -\frac{5}{12} & \frac{1}{8} & \frac{1}{24} \end{pmatrix}.$$

Opérations sur les colonnes comme produits matriciels

De la même manière on peut vérifier qu'effectuer des opérations sur les colonnes d'une matrice revient à **multiplier à droite** par des matrices particulières: par exemple

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a & b & c \\ \lambda d & e & f \\ \lambda g & h & i \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & a & c \\ e & d & f \\ h & g & i \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \mu & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b + \lambda a + \mu c & c \\ d & e + \lambda d + \mu f & f \\ g & h + \lambda g + \mu i & i \end{pmatrix}.$$

Pivot de Gauss sur les colonnes

Ceci montre qu'on peut effectuer la méthode du pivot de Gauss en n'effectuant que des opérations **sur les colonnes**:

- ▶ On part d'une matrice **carrée** M , on l'augmente de la matrice identité et on effectue une suite d'opérations **sur les colonnes uniquement** transformant M en la matrice identité.
- ▶ On effectue ces mêmes opérations à chaque étape sur la matrice identité et on lit à la fin l'inverse de la matrice **sur la matrice identité transformée**.
- ▶ En effet: si on note les matrices associées à ces opérations : $P_1, P_2, P_3, \dots, P_k$. (P_k est la dernière opération effectuée.) Ceci signifie que : $MP_1P_2 \cdots P_k = I$, et donc

$$M^{-1} = P_1P_2 \cdots P_k = P_1P_2 \cdots P_k I.$$

Contenu de la section

Applications linéaires

Contenu de la section

Applications linéaires

Un exemple

Applications linéaires

Un exemple avec de la trigonométrie

Résultat

Soient θ, β des nombres réels et A et B définies par

$$A = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix}$$

- Pour tous $\theta, \beta \in \mathbb{R}$, on a $AB = BA$.
- Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, A est inversible et son inverse est la matrice obtenue par A en remplaçant θ par $-\theta$.

Preuve

$$\begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \beta - \sin \theta \sin \beta & -\cos \theta \sin \beta - \sin \theta \cos \beta \\ \sin \theta \cos \beta + \cos \theta \sin \beta & -\sin \theta \sin \beta + \cos \theta \cos \beta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\theta + \beta) & -\sin(\theta + \beta) \\ \sin(\theta + \beta) & \cos(\theta + \beta) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

où on a utilisé les formules donnant $\sin(\theta + \beta)$ et $\cos(\theta + \beta)$ pour la dernière égalité. (Rappel: *ces formules sont à connaître*).

Pour calculer BA il suffit d'inverser les rôles de θ et β : on trouve donc $BA = AB$.

En particulier, si on choisit $\beta = -\theta$, on trouve $AB = BA = I_2$. Et donc la matrice A admet un inverse par définition. L'inverse de A est donc

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \cos(-\theta) & -\sin(-\theta) \\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Interprétation géométrique

Pour $\theta \in \mathbb{R}$, on note

$$A_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

On peut associer à chaque matrice A_θ une transformation du plan – c'est-à-dire **une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$** – donnée par:

$$R_\theta : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto A_\theta \vec{x} = \begin{pmatrix} \cos \theta x_1 - \sin \theta x_2 \\ \sin \theta x_1 + \cos \theta x_2 \end{pmatrix} \end{cases}$$

La transformation R_θ représente alors la rotation de centre O et d'angle θ . Une manière de voir ça est de remarquer que l'image du point $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ est exactement:

$$R_\theta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}.$$

Contenu de la section

Applications linéaires

Un exemple

Applications linéaires

Applications linéaires

Soit M une matrice réelle de taille $m \times n$. Elle définit une application $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ grâce au produit matriciel:

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^n \rightarrow & \mathbb{R}^m \\ (x_1, \dots, x_n) \mapsto & M \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \end{cases}$$

où on identifie le vecteur $\vec{x}$ à la matrice-colonne de taille $n \times 1$ et la matrice-colonne $M \cdot \vec{x}$ (de taille $m \times 1$) à un vecteur de $\mathbb{R}^m$.

Définition

Une application $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ définie de cette manière (à partir d'une matrice) est appelée **application linéaire**.

Propriétés des applications linéaires

L'importance des applications linéaires se manifestera notamment en termes de différentielles de fonctions de plusieurs variables. Voici leur propriété principale:

Résultat

Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ une application linéaire. Alors pour tous $\mathbf{h}, \mathbf{k} \in \mathbb{R}^n$ et pour tous réels $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ on a:

$$f(\lambda \mathbf{h} + \mu \mathbf{k}) = \lambda f(\mathbf{h}) + \mu f(\mathbf{k}).$$

Preuve

La preuve suit de la définition en termes de produit matriciel:

$$f(\lambda \mathbf{h} + \mu \mathbf{k}) = M(\lambda \mathbf{h} + \mu \mathbf{k}) = \lambda M\mathbf{h} + \mu M\mathbf{k} = \lambda f(\mathbf{h}) + \mu f(\mathbf{k}).$$