

Fonctions de plusieurs variables 2

(Syllabus Chapitre XVI, parties 3 et 4)

Régularité des fonctions $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$

Comme dans le cas des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, nous allons définir divers niveaux de régularité:

- ▶ continuité
- ▶ dérivabilité (dans une direction)
- ▶ différentiabilité

Les fonctions différentiables seront les plus “agréables” des trois, et ce seront les fonctions qui retiendront notre attention. Nous commençons par parler de continuité et de limites.

Contenu de la section

Limites et continuité pour les fonctions $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$

Contenu de la section

Limites et continuité pour les fonctions $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$

Limites

Continuité

Point adhérent

Définition

Soit $A \subset \mathbb{R}^n$ un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$. Un point $a \in \mathbb{R}^n$ est *adhérent* à A si pour tout δ strictement positif, il existe $x \in A$ tel que $\|a - x\| < \delta$.

On note $\text{adh } A$ l'ensemble des points adhérents à A .

Rappel: $\|x - a\|$ mesure, dans $\mathbb{R}^n$, la distance de x à a . Un point adhérent de A est donc un point qui peut être *arbitrairement approché par des points de A* .

Un point adhérent à A peut ne pas être dans l'ensemble A !

Point adhérent

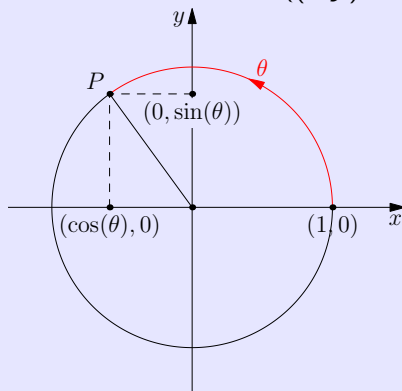
Exemple

0 et 1 sont points adhérents de l'intervalle ouvert $]0, 1[$, mais ils ne sont pas dans l'intervalle.

Exemple

On considère le disque unité ouvert:

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tels que } x^2 + y^2 < 1\}.$$



Le bord de ce disque, qui est le cercle trigonométrique $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, \text{ tels que } x^2 + y^2 = 1\}$, n'est pas dans D . Mais **tous les points du bord sont aussi des points adhérents à D .**

En général, si $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, les points adhérents à A sont les points où on peut parler de limite de f (si elle existe!).

Définition de limite

Définition

Considérons $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, un point $\mathbf{a} \in \text{adh } A$, et un point $\mathbf{L} \in \mathbb{R}^m$.
On dit que la limite de f en $\mathbf{a}$ est $\mathbf{L}$ si

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall \mathbf{x} \in A, 0 < \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| < \delta \Rightarrow \|f(\mathbf{x}) - \mathbf{L}\| < \epsilon.$$

Cette situation est notée $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = \mathbf{L}$.

C'est donc l'analogie de la définition vue pour les fonctions $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,
sauf que la norme remplace la valeur absolue.

Attention aussi à ce que les deux normes sont prises dans des espaces différents: $\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|$ est la norme sur $\mathbb{R}^n$ (au départ) et $\|f(\mathbf{x}) - \mathbf{L}\|$ est la norme sur $\mathbb{R}^m$ (à l'arrivée).

Exemple

Si $f(x,y) = \frac{x^3}{x^2+y^2}$, alors $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = 0$.

Preuve

Nous voulons montrer que $\forall \epsilon > 0$,

$\exists \delta > 0 : \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}, \|(x,y) - (0,0)\| < \delta \Rightarrow \|f(x,y) - 0\| < \epsilon$
c'est-à-dire

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, 0 < \sqrt{x^2 + y^2} < \delta \Rightarrow \left| \frac{x^3}{x^2 + y^2} \right| < \epsilon$$

Pour montrer ceci on commence par remarquer qu'on peut majorer $|x|^3$ et $|x|$ de la manière suivante: $|x^3| = |x|x^2 \leq |x|(x^2 + y^2)$, et de même: $|x| = \sqrt{x^2} \leq \sqrt{x^2 + y^2}$. Dès lors,

$$\left| \frac{x^3}{x^2 + y^2} \right| \leq |x| \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2} = |x| \leq \sqrt{x^2 + y^2} = \|(x,y)\|.$$

Choisissons $\epsilon > 0$. On choisit $\delta := \epsilon$: alors si $\|(x,y)\| < \delta$, alors $|f(x,y)| \leq \|(x,y)\| < \epsilon$. Ce qui montre bien la limite cherchée.

Contenu de la section

Limites et continuité pour les fonctions $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$

Limites

Continuité

Continuité

Définition

Une application $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ est dite **continue au point a** si

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$

Globalement, f est dite continue si elle est **continue en tout point de son domaine**.

Remarque

Pour $n = 1$ (c'est-à-dire lorsque l'ensemble de départ est une partie de $\mathbb{R}$), ces définitions sont exactement les mêmes que les définitions déjà données dans les chapitres sur les fonctions réelles (où $m = 1$) et dans la section sur les courbes paramétrées (où m est quelconque).

Exemple

La fonction

$$f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \rightarrow \mathbb{R} : (x,y) \mapsto \frac{x^3}{x^2 + y^2}$$

est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ (ceci découle juste de l'expression de la fonction et des règles de calcul des limites).

On décide de prolonger cette fonction à $\mathbb{R}^2$ en lui donnant la valeur $(0,0)$ en $(0,0)$. Ceci définit alors une nouvelle fonction:

$$g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : (x,y) \mapsto \begin{cases} \frac{x^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Cette nouvelle fonction est alors **continue sur $\mathbb{R}^2$** , car on a montré plus haut que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} g(x,y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3}{x^2 + y^2} = 0.$$

Règles de calcul

Résultat (Règles de calcul)

Soient $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ deux fonctions continues en $\mathbf{a}$, alors

- ▶ $f + g, f - g, fg$ sont continues en $\mathbf{a}$;
- ▶ si $g(\mathbf{a}) \neq \mathbf{0}$, alors $\frac{f}{g}$ est continue en $\mathbf{a}$.

Par ailleurs, si f est continue en $\mathbf{a}$ et g est continue en $f(\mathbf{a})$, alors $g \circ f$ est continue en $\mathbf{a}$.

Ce sont les mêmes règles que pour les fonctions $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Remarque

Ceci prouve que toutes les fonctions pour lesquelles nous avons une formule en terme des fonctions élémentaires (polynomiales, racines, trigonométriques, logarithmes, exponentielles,) sont continues sur leur domaine.

Fonctions continues et courbes paramétrées

En particulier, le résultat sur la composée des applications continues fournit le résultat suivant :

Corollaire

Soit $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ qui admet une limite L en a . Alors, pour toute courbe paramétrée $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, avec $0 \in I$, telle que $\gamma(0) = a$, on a :

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(\gamma(t)) = L.$$

Remarque

Ce résultat dit que si la limite existe, alors elle vaut la même valeur quelle que soit la façon dont on approche le point a dans $\mathbb{R}^n$.

C'est une remarque importante car dès que $n \geq 2$ il y a une infinité de manières de s'approcher de 0 dans $\mathbb{R}^n$ (contre 2 seulement dans $\mathbb{R}$).

En particulier: pour trouver une fonction qui n'a pas de limite en 0 (et donc **non**-continue en 0), il faudra chercher une fonction qui a une limite différente dans plusieurs directions différentes près de 0.

Exemple

Considérons $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$ prolongée par 0 en l'origine, c'est-à-dire

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : (x,y) \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } (x,y) = (0,0), \\ \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Alors f n'est pas continue en 0. On va le montrer en trouvant deux courbes paramétrées qui, composées avec f , n'ont pas la même limite en 0.

1. En effet, on choisit d'abord $\gamma(t) = (t,0)$ de sorte que

$$f(\gamma(t)) = \frac{t \cdot 0}{t^2 + 0^2} = 0 \text{ pour tout } t \neq 0. \text{ Alors:}$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(\gamma(t)) = \lim_{t \rightarrow 0} 0 = 0.$$

2. Prenons maintenant une autre courbe paramétrée $\eta(t) = (t,t)$, de sorte que $f(\eta(t)) = \frac{1}{2}$ pour tout $t \neq 0$. Alors

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(\eta(t)) = \frac{1}{2}.$$

La limite est différente, donc f n'admet pas de limite en $(0,0)$.

Contenu de la section

Dérivabilité pour les fonctions $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$

Une mise en garde

Remarque

Si $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, la notion de dérivée avec un taux d'accroissement faisant intervenir $f(\mathbf{x} + \delta)$ n'a plus de sens, car ici $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ et $\delta \in \mathbb{R}$.

Et même si on remplace $\delta \in \mathbb{R}$ par un vecteur $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n$, vouloir définir la dérivée comme la limite du taux d'accroissement:

$$\frac{f(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x})}{\mathbf{h}}$$

n'a pas de sens non plus, car **on ne peut pas diviser par un vecteur**.

On va remplacer cette définition par la notion de **dérivée directionnelle**: en choisissant une direction fixée, on verra f comme une fonction d'une seule variable quand on la restreint à cette direction.

Point intérieur

Définition

Si $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ et $\epsilon > 0$, la boule ouverte de centre $\mathbf{a}$ et de rayon ϵ est définie par:

$$B(\mathbf{a}, \epsilon) = \{x \in \mathbb{R}^n \text{ tels que } \|x - \mathbf{a}\| < \epsilon\}.$$

Définition

Un point $\mathbf{a}$ est **intérieur à un ensemble A** s'il existe $\epsilon > 0$ tel que $B(\mathbf{a}, \epsilon) \subset A$. On note **int A** l'ensemble des points intérieurs à A .

Point intérieur

Exemple

le point $(0,0)$ est intérieur au disque unité défini par

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tels que } x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

Plus généralement, un point est intérieur à un ensemble si on peut “bouger un peu” autour de ce point tout en restant dans l’ensemble. Les points intérieurs sont **les points où la notion de dérivée a du sens.**

Contenu de la section

Dérivabilité pour les fonctions $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$

Dérivées directionnelles

Matrice jacobienne

Dérivées directionnelles

Définition

Soit $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ une application, $\mathbf{a} \in \text{int } A$ un point intérieur à A et $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$. La *dérivée directionnelle* de f au point $\mathbf{a}$ dans la direction $\vec{v}$, si elle existe, est l'élément de $\mathbb{R}^m$ donné par

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(\mathbf{a}) := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{a} + t\vec{v}) - f(\mathbf{a})}{t}.$$

Il existe un cas particulier très important où le vecteur $\vec{v}$ est un des vecteurs de base $\mathbf{e}_i = (0, \dots, 1, \dots, 0)$. Si $\vec{v} = \vec{e}_i$ pour un i entre 1 et n , on parle alors de la *i -ème dérivée partielle en $\mathbf{a}$* :

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a}) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{a} + t\vec{e}_i) - f(\mathbf{a})}{t}.$$

On la note alors $\partial_i f(\mathbf{a})$, $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a})$ ou, dans le cas où on appelle $(x, y, \dots)$ les variables, $\frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{a})$ (pour la première dérivée partielle), $\frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{a})$ (pour la seconde dérivée partielle), etc.

Interprétation de la dérivée directionnelle

Pour interpréter $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(\mathbf{a})$, considérons la fonction $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$ définie par

$$g(t) := f(\mathbf{a} + t\vec{v}).$$

La fonction g n'est autre que la fonction f restreinte à la droite passant par $\mathbf{a}$ et de vecteur directeur $\vec{v}$. La dérivée directionnelle en $\vec{v}$ est donc la dérivée de g en 0:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(\mathbf{a}) = g'(0).$$

Dans le cas de la i -ème dérivée partielle: pour les calculer on gèle la valeur de toutes les variables $(x_1, \dots, x_n)$ – sauf de la i -ème –, on regarde les valeurs de la fonction sur l'axe Ox_i , et on dérive par rapport à la variable x_i .

Remarque:

Etant donnée une fonction $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, la dérivée directionnelle $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(\vec{a})$ donne la pente de la droite tangente à l'hypersurface $y = f(\vec{x})$ dans $\mathbb{R}^{n+1}$ au point $(\vec{a}, f(\vec{a}))$ dans la direction $\vec{v}$.

Calcul des dérivées partielles

Les dérivées partielles se calculent simplement!

Pour une fonction $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ de trois variables (x, y, z) , par exemple, la dérivée partielle de $f(x, y, z)$ par rapport à y se calcule **en considérant x et z constantes**, et en dérivant par rapport à y .

Exemple

Notons $f(x, y, z) = xy + x^2 + zy$. Les dérivées partielles en un point (x, y, z) sont :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = y + 2x \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = x + z \quad \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = y$$

Contenu de la section

Dérivabilité pour les fonctions $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$

Dérivées directionnelles

Matrice jacobienne

Exemple

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 : (x, y) \mapsto (x + yx, x^2 - y)$, alors

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = (1 + y, 2x) \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = (x, -1).$$

Comme dans le cas des courbes paramétrées, on peut voir f comme un couple de fonctions

$$f = (f_1, f_2), \quad f_1(x, y) = x + yx, \quad f_2(x, y) = x^2 - y.$$

Ici chaque $f_i, i = 1, 2$, est une fonction $f_i : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$.

On écrira en particulier :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial x}(x, y) &= 1 + y & \frac{\partial f_1}{\partial y}(x, y) &= x \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y) &= 2x & \frac{\partial f_2}{\partial y}(x, y) &= -1. \end{aligned}$$

Matrice Jacobienne

Définition

Soit $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ qu'on écrit comme $f = (f_1, \dots, f_m)$, où $f_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. La **matrice jacobienne de f au point $\mathbf{a} \in \text{int } A$** est la matrice de taille $m \times n$ formée par les dérivées partielles $\partial_j f_i$ en $\mathbf{a}$:

$$J_f(\mathbf{a}) := \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}.$$

Note: $f(\mathbf{x}) = (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n))$.

Lorsque $m = 1$, la jacobienne ne comporte qu'une seule ligne, et on peut donc l'assimiler à un vecteur qui est appelé le **gradient de f au point $\mathbf{a}$** :

$$\nabla f(\mathbf{a}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{a}), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{a}) \right) \in \mathbb{R}^n.$$

Exemple

Si $f(x, y) = x^2 y^3$, les dérivées partielles en un point (a, b) de $\mathbb{R}^2$ sont

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = 2ab^3 \quad \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = 3a^2 b^2.$$

La matrice jacobienne, ou gradient ici, est donnée par

$$(2ab^3, 3a^2 b^2).$$

Plus généralement, la dérivée directionnelle dans la direction (u, v) au point (a, b) est

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial (u, v)}(a, b) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f((a, b) + t(u, v)) - f(a, b)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(a + tu)^2 (b + tv)^3 - a^2 b^3}{t} \\ &= 2ab^3 u + 3a^2 b^2 v \end{aligned}$$

(faites le calcul pour vous en convaincre!)