

Intégrales multiples 2

(Syllabus Chapitre XVII, parties 5 à la fin)

Contenu de la section

Propriétés des intégrales multiples

Propriétés

Théorème

Si $A \subset \mathbb{R}^2$ est un domaine borné, et $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ est continue et bornée, alors f est intégrable et $\iint_A f(x,y) dx dy$ existe.

Propriétés

Comme dans le cas des fonctions d'une variable, nous avons des propriétés d'additivité :

Résultat

Si $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$ alors

$$\iint_A (\alpha f + \beta g) = \alpha \iint_A f + \beta \iint_A g.$$

Si $A, B \subset \mathbb{R}^2$ sont des ensembles bornés, et $A \cap B = \emptyset$, alors

$$\iint_{A \cup B} f = \iint_A f + \iint_B f.$$

Attention, si A et B ont une intersection non vide, ceci n'est plus vrai!

Contenu de la section

Changements de coordonnées pour calculer des intégrales

Contenu de la section

Changements de coordonnées pour calculer des intégrales

Coordonnées polaires – Rappel

Coordonnées quelconques; le cadre théorique

Rappel

Soit $A \subset \mathbb{R}^2$ un ensemble. On note $B \subset [0, +\infty[\times [0, 2\pi[$ l'ensemble des valeurs prises par les coordonnées polaires (ρ, θ) des points de A .

Résultat

Soit $f : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction intégrable (par exemple, continue et bornée sur A). Alors:

$$\iint_A f(x, y) dx dy = \iint_B f(\rho \cos(\theta), \rho \sin(\theta)) \rho d\rho d\theta.$$

Cette propriété permet de calculer des intégrales en les écrivant **en coordonnées polaires**.

Dans un changement de coordonnées il faut: ne pas oublier le ρ dans l'élément de surface $\rho d\rho d\theta$, changer le domaine d'intégration en B et changer x et y en $\rho \cos(\theta)$ et $\rho \sin(\theta)$.

Contenu de la section

Changements de coordonnées pour calculer des intégrales

Coordonnées polaires – Rappel

Coordonnées quelconques; le cadre théorique

Systèmes de coordonnées

Rappelons qu'un *système de coordonnées* sur une partie du plan est une bijection entre ce sous-ensemble et une partie de $\mathbb{R}^2$.

“Bijection” signifie que tout point du plan est *uniquement* représenté par un couple de nombres dans $\mathbb{R}^2$.

En présence de *deux* (ou plusieurs) systèmes de coordonnées, chaque point du plan possède donc deux (ou plusieurs) paires de coordonnées.

Exemple

Le point du plan représenté par $(x, y) = (-1, 0)$ en *coordonnées cartésiennes* est aussi représenté par $(\rho, \theta) = (1, \pi)$ en *coordonnées polaires*.

Changement de coordonnées

On note (u, v) des coordonnées quelconques (par exemple polaires), à valeur dans une partie B du plan.

Le passage de (u, v) aux coordonnées cartésiennes (x, y) fournit une **bijection**. Elle est appelée **changement de coordonnées**.

Ceci signifie qu'on peut écrire les coordonnées cartésiennes $(x, y) = F(u, v)$ où F est une fonction de $B \subset \mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$. Ainsi:

$$(x, y) = F(u, v) = (F_1(u, v), F_2(u, v)).$$

Ici $F_1, F_2 : B \rightarrow \mathbb{R}$ sont les fonctions donnant respectivement x et y en fonction de u et v :

$$x = F_1(u, v) \quad \text{et} \quad y = F_2(u, v).$$

Changement de coordonnées

Exemple (Coordonnées polaires)

Elles sont définies pour $(\rho, \theta) \in B =]0, +\infty[\times [0, 2\pi[$.

Comme $x = \rho \cos(\theta)$ et $y = \rho \sin(\theta)$, la fonction

$F : (\rho, \theta) \in]0, +\infty[\times [0, 2\pi[\rightarrow \mathbb{R}^2$ est:

$$F(\rho, \theta) = (\rho \cos(\theta), \rho \sin(\theta)) = (F_1(\rho, \theta), F_2(\rho, \theta)).$$

Changement de variables dans une intégrale

Résultat

Soit $A \subset \mathbb{R}^2$. On suppose que tout point de A a des coordonnées (u, v) (autres que les cartésiennes) dont les valeurs décrivent *un ensemble* B quand (x, y) décrit A . On note

$$(x, y) = F(u, v) = (F_1(u, v), F_2(u, v))$$

le changement de coordonnées.

Soit $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ continue. Alors l'intégrale de f sur A se calcule comme:

$$\iint_A f(x, y) dx dy = \iint_B f(F_1(u, v), F_2(u, v)) |\det \text{Jac } F_{(u, v)}| du dv.$$

Dans cette formule, $|\det \text{Jac } F_{(u, v)}|$ désigne la valeur absolue du déterminant de la matrice Jacobienne (la matrice des dérivées partielles de F). Il faut donc *remplacer* x par $F_1(u, v)$, y par $F_2(u, v)$, A par B et $dx dy$ par $|\det \text{Jac } F_{(u, v)}| du dv$.

Exemple (Coordonnées polaires dans $\mathbb{R}^2$)

Pour les coordonnées polaires le changement de coordonnées est

$F :]0, +\infty[\times [0, 2\pi[\rightarrow \mathbb{R}^2$ donné par

$$F(\rho, \theta) = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \iff F_1(\rho, \theta) = \rho \cos \theta, \quad F_2(\rho, \theta) = \rho \sin \theta.$$

Alors:

$$\frac{\partial F_1}{\partial \rho} = \cos(\theta) \quad \frac{\partial F_1}{\partial \theta} = -\rho \sin(\theta)$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial \rho} = \sin(\theta) \quad \frac{\partial F_2}{\partial \theta} = \rho \cos(\theta).$$

La matrice Jacobienne est ainsi donnée par:

$$\text{Jac } F_{(\rho, \theta)} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\rho \sin \theta \\ \sin \theta & \rho \cos \theta \end{pmatrix}$$

dont la valeur absolue du déterminant est:

$$|\det \text{Jac } F_{(\rho, \theta)}| = |\cos(\theta) \cdot \rho \cos(\theta) - (-\rho \sin(\theta)) \cdot \sin(\theta)| = \rho.$$

Ceci explique pourquoi on a $\rho d\rho d\theta$ dans la formule:

$$\iint_A f(x, y) dx dy = \iint_B f(\rho \cos(\theta), \rho \sin(\theta)) \rho d\rho d\theta.$$

Remarques

- ▶ En faisant le changement de variables **n'oubliez pas de changer le domaine de définition des nouvelles coordonnées**
- ▶ Ici, $F : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ est une application de deux variables à valeurs dans $\mathbb{R}^2$, car nous parlons de coordonnées sur le plan. La même formule de changement de variables reste encore vraie **pour des coordonnées sur $\mathbb{R}^n$** : dans ce cas F devient une application $F : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, et le déterminant est celui d'une matrice de taille $n \times n$ (n lignes et n colonnes).
- ▶ $|\det \text{Jac} F_{(u,v)}|$ a une interprétation géométrique: un très petit rectangle de côtés dx et dy , donc d'aire $dx dy$ en coordonnées (x,y) se transforme **en un (très petit) parallélogramme d'aire $|\det \text{Jac} F_{(u,v)}| du dv$ en coordonnées (u,v) .**

Contenu de la section

Intégrales triples

Intégrales triples

Tout ce que nous venons de voir s'adapte en dimensions plus grandes. Soit f une fonction définie sur une partie A de l'espace $\mathbb{R}^3$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Par analogie avec l'intégrale double, l'intégrale triple

$$\iiint_A f(x,y,z) dx dy dz$$

représente "l'hypervolume algébrique sous le graphe de f ".

C'est-à-dire le volume d'un ensemble de $\mathbb{R}^4$, qui n'est donc pas représentable graphiquement.

En revanche, dans le cas particulier $f(x,y,z) \equiv 1$, comme pour les intégrales doubles,

$$\iiint_A dx dy dz$$

est la valeur du volume de l'ensemble des points de l'espace $\mathbb{R}^3$ dont les coordonnées cartésiennes sont dans A . Calculer des intégrales triples permet donc de calculer des volumes.

Contenu de la section

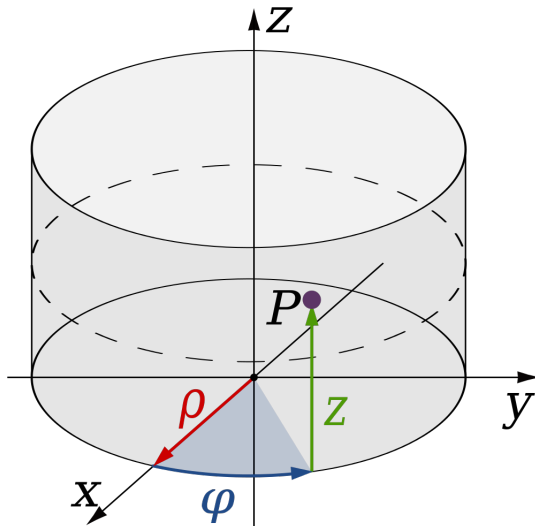
Intégrales triples

Coordonnées cylindriques

Coordonnées sphériques

Illustration des coordonnées cylindriques

L'angle θ est dans le dessin suivant noté φ :



Coordonnées cylindriques sur $\mathbb{R}^3$

Ces coordonnées sont obtenues en gardant la hauteur z intacte et **en utilisant des coordonnées polaires dans le plan (x, y)** . L'application de changement de coordonnées est donc:

$$F :]0, +\infty[\times [0, 2\pi[\times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$F(\rho, \theta, z) = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, z).$$

Ou encore:

$$x = \rho \cos(\theta), \quad y = \rho \sin(\theta), \quad z = z.$$

Le calcul de la matrice Jacobienne est alors le même que pour les coordonnées polaires, et on trouve $|\det \text{Jac } F_{(\rho, \theta, z)}| = \rho$. Ainsi:

$$\iiint_A f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \iiint_{F^{-1}(A)} f(\rho \cos(\theta), \rho \sin(\theta), z) \rho \, d\rho \, d\theta \, dz.$$

Ici $F^{-1}(A)$ désigne l'ensemble des valeurs prises par (ρ, θ, z) lorsque (x, y, z) parcourent A . Pour calculer cette intégrale, le théorème de Fubini s'applique encore: **on peut toujours intégrer une variable après l'autre.**

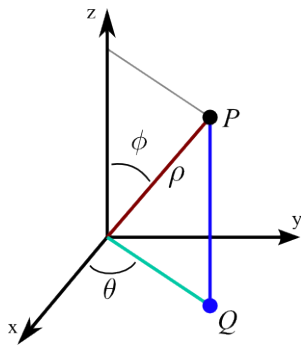
Contenu de la section

Intégrales triples

Coordonnées cylindriques

Coordonnées sphériques

Coordonnées sphériques 1



C'est un autre changement de coordonnées très utile dans l'espace $\mathbb{R}^3$. On repère maintenant les points de $\mathbb{R}^3$ par leur distance à l'origine ρ et deux angles φ et θ .

ρ représente la distance (dans $\mathbb{R}^3$) entre le point P et l'origine O :

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

φ désigne l'angle entre la droite (OP) et l'axe vertical (Oz) :

$$z = \rho \cos(\varphi).$$

θ désigne l'angle entre la projection de P dans le plan Oxy et l'axe (Ox) :

$$x = \rho \sin(\varphi) \cos(\theta) \quad y = \rho \sin(\varphi) \sin(\theta).$$

Coordonnées sphériques 2

Les **coordonnées sphériques** sur $\mathbb{R}^3$ sont dès lors définies par l'application de changement de coordonnées suivante:

$$F : \begin{cases}]0, +\infty[\times]0, 2\pi] \times [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^3 : \\ (\rho, \theta, \varphi) \mapsto (\rho \cos(\theta) \sin(\varphi), \rho \sin(\theta) \sin(\varphi), \rho \cos \varphi) \end{cases}$$

Ici, θ est parfois nommée **longitude** et φ est alors la **colatitude**.

En coordonnées sphériques:

$$(x, y, z) = F(\rho, \theta, \varphi) = (\rho \cos(\theta) \sin(\varphi), \rho \sin(\theta) \sin(\varphi), \rho \cos \varphi).$$

Nous allons calculer $|\det \text{Jac } F(\rho, \theta, \varphi)|$. Par définition:

$$\text{Jac } F(\rho, \theta, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) \sin(\varphi) & -\rho \sin(\theta) \sin(\varphi) & \rho \cos(\theta) \cos(\varphi) \\ \sin(\theta) \sin(\varphi) & \rho \cos(\theta) \sin(\varphi) & \rho \sin(\theta) \cos(\varphi) \\ \cos(\varphi) & 0 & -\rho \sin(\varphi) \end{pmatrix}.$$

En développant par rapport à la dernière ligne on trouve:

$$\begin{aligned} |\det \text{Jac } F| &= \left| \cos(\varphi) \begin{vmatrix} -\rho \sin(\theta) \sin(\varphi) & \rho \cos(\theta) \cos(\varphi) \\ \rho \cos(\theta) \sin(\varphi) & \rho \sin(\theta) \cos(\varphi) \end{vmatrix} + 0 \right. \\ &\quad \left. + (-\rho \sin(\varphi)) \begin{vmatrix} \cos(\theta) \sin(\varphi) & -\rho \sin(\theta) \sin(\varphi) \\ \sin(\theta) \sin(\varphi) & \rho \cos(\theta) \sin(\varphi) \end{vmatrix} \right| \\ &= \left| \cos(\varphi) \left(-\rho^2 \cos(\varphi) \sin(\varphi) \right) + (-\rho \sin(\varphi)) \rho \sin(\varphi)^2 \right| \\ &= \left| -\rho^2 \sin(\varphi) (\cos(\varphi)^2 + \sin(\varphi)^2) \right| = \rho^2 \sin(\varphi). \end{aligned}$$

Formule de changement de variables en coordonnées sphériques

Nous venons de voir que $|\det \text{Jac } F| = \rho^2 \sin(\varphi)$. Soit f une fonction $f : A \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$. On désigne par B l'ensemble des valeurs prises par les coordonnées sphériques sur A . La formule de changement de variables devient donc:

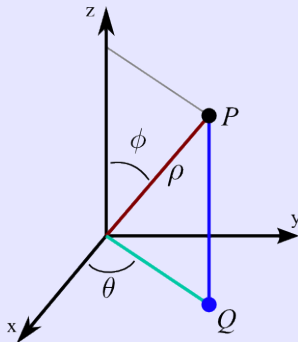
$$\begin{aligned} \iiint_A f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \\ \iiint_B f(\rho \cos(\theta) \sin(\varphi), \rho \sin(\theta) \sin(\varphi), \rho \cos \varphi) \rho^2 \sin(\varphi) \, d\rho \, d\theta \, d\varphi. \end{aligned}$$

Dans le cas particulier où $f(x, y, z) = 1$ pour tout $(x, y, z) \in A$, cette intégrale est le volume de l'ensemble A .

Exemple (Volume de la boule dans $\mathbb{R}^3$)

La boule de centre 0 et de rayon 1 est $A = \{(x, y, z), x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$.
Alors les variables des coordonnées sphériques vérifient:

$$0 \leq \rho \leq 1, \quad 0 \leq \theta < 2\pi, \quad 0 < \phi < \pi.$$



Exemple (Volume de la boule dans $\mathbb{R}^3$, suite)

On note alors $B = [0, 1] \times [0, 2\pi[\times]0, \pi[$. Par un changement de coordonnées sphérique, le volume de la boule vaut:

$$\begin{aligned}\iiint_A 1 \, dx \, dy \, dz &= \iiint_B \rho^2 \sin \varphi \, d\rho \, d\theta \, d\varphi \\ &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \rho^2 \sin \varphi \, d\varphi \, d\theta \, d\rho \\ &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \rho^2 [-\cos \varphi]_0^\pi \, d\theta \, d\rho \\ &= 2 \int_0^1 \int_0^{2\pi} \rho^2 \, d\theta \, d\rho \\ &= 4\pi \int_0^1 \rho^2 \, d\rho = \frac{4}{3}\pi.\end{aligned}$$