

# Nombres complexes

(Syllabus Chapitre XIX, parties 1 à 3)

# Contenu de la section

Motivation

# Rotations

Considérons dans le plan  $\mathbb{R}^2$  la rotation de centre  $(0,0)$  et d'angle  $\varphi$ , notée  $R$ .

C'est une transformation du plan, qui s'écrit naturellement en coordonnées polaires comme :

$$R(\rho, \theta) = (\rho, \theta + \varphi).$$

Pour l'écrire en coordonnées cartésiennes il suffit d'écrire les coordonnées cartésiennes du point d'arrivée  $x = \rho \cos(\theta)$ ,  $y = \rho \sin(\theta)$  et de développer grâce aux formules trigonométriques :

$$\begin{aligned} R(x, y) &= (\rho \cos(\theta + \varphi), \rho \sin(\theta + \varphi)) \\ &= (\rho \cos(\theta) \cos(\varphi) - \rho \sin(\theta) \sin(\varphi), \rho \cos(\theta) \sin(\varphi) + \rho \sin(\theta) \cos(\varphi)) \\ &= (x \cos(\varphi) - y \sin(\varphi), x \sin(\varphi) + y \cos(\varphi)) \end{aligned}$$

L'application  $R(x, y) = (x \cos(\varphi) - y \sin(\varphi), x \sin(\varphi) + y \cos(\varphi))$  représente donc la rotation d'angle  $\varphi$  en coordonnées cartésiennes.

# Une multiplication sur $\mathbb{R}^2$

Nous décidons d'interpréter cette transformation comme **une certaine multiplication** entre couples de nombres de  $\mathbb{R}^2$ .

## Définition

Si  $(a, b)$  et  $(c, d)$  sont des éléments de  $\mathbb{R}^2$ , on définit leur **produit complexe**, qui est encore un élément de  $\mathbb{R}^2$ , par:

$$(a, b)(c, d) = (ac - bd, ad + bc).$$

Ceci n'a rien à voir avec le produit scalaire sur  $\mathbb{R}^2$ !

## Exemple

On choisit  $(a, b) = (\cos \varphi, \sin \varphi)$ : alors

$$(\cos \varphi, \sin \varphi)(x, y) = (x \cos(\varphi) - y \sin(\varphi), x \sin(\varphi) + y \cos(\varphi)).$$

L'image du point  $(x, y)$  par la rotation d'angle  $\varphi$  s'interprète donc comme le produit complexe de  $(\cos \varphi, \sin \varphi)$  et  $(x, y)$ .

Si  $(a, b) = (k, 0)$ , on trouve de même  $(k, 0)(x, y) = (kx, ky)$ : ce qui décrit donc une homothétie de rapport  $k$ .

# Notations

## Définition

On notera à partir de maintenant par  $i$  le point du plan donné par:

$$i = (0, 1).$$

De la sorte tout point  $(a, b)$  du plan s'écrit comme:

$$(a, b) = a(1, 0) + b(0, 1) = a + ib$$

Dorénavant les éléments de  $\mathbb{R}^2$  munis de la multiplication complexe qu'on vient de définir seront appelés **nombre complexes** et notés sous la forme  $a + ib$  (ou  $a + bi$ ).

La formule du produit complexe se réécrit donc comme :

$$\begin{aligned}(a + ib)(c + id) &= (a, b)(c, d) = (ac - bd, ad + bc) \\ &= (ac - bd) + i(ad + bc)\end{aligned}$$

On a en particulier:

$$i^2 = (0 + 1 \cdot i)(0 + 1 \cdot i) = (0 - 1) + i(0 + 0) = -1.$$

# Contenu de la section

Définitions et premières propriétés

# Définitions

## Définition

L'ensemble des *nombre complexes* est l'ensemble noté

$$\mathbb{C} = \{a + bi \text{ t.q. } a, b \in \mathbb{R}\},$$

et muni de la multiplication complexe. C'est donc l'ensemble  $\mathbb{R}^2$  des couples de réels muni de la multiplication complexe définie précédemment.

## Remarque

Lorsque nous dirons “Soit  $z$  un nombre complexe, ...” nous entendrons donc que  $z$  s'écrit sous la forme  $z = a + bi$  pour certains *réels*  $a, b$ .

## Résultat

*Deux nombres complexes  $a + bi$  et  $c + di$  sont égaux si et seulement si  $a = c$  et  $b = d$ .*

# Partie réelle et imaginaire

## Définition

Si  $z = a + bi$  est un nombre complexe avec  $a, b \in \mathbb{R}$ , on appelle  $a$  sa *partie réelle* et  $b$  sa *partie imaginaire*.

Un nombre complexe dont la partie réelle est nulle est appelé un nombre *imaginaire pur*.

## Exemple

$i, -i, 2i, \dots$  sont imaginaires purs.

## Remarque

Un nombre complexe dont la partie imaginaire est nulle ... *est un nombre réel*.

# Contenu de la section

Définitions et premières propriétés

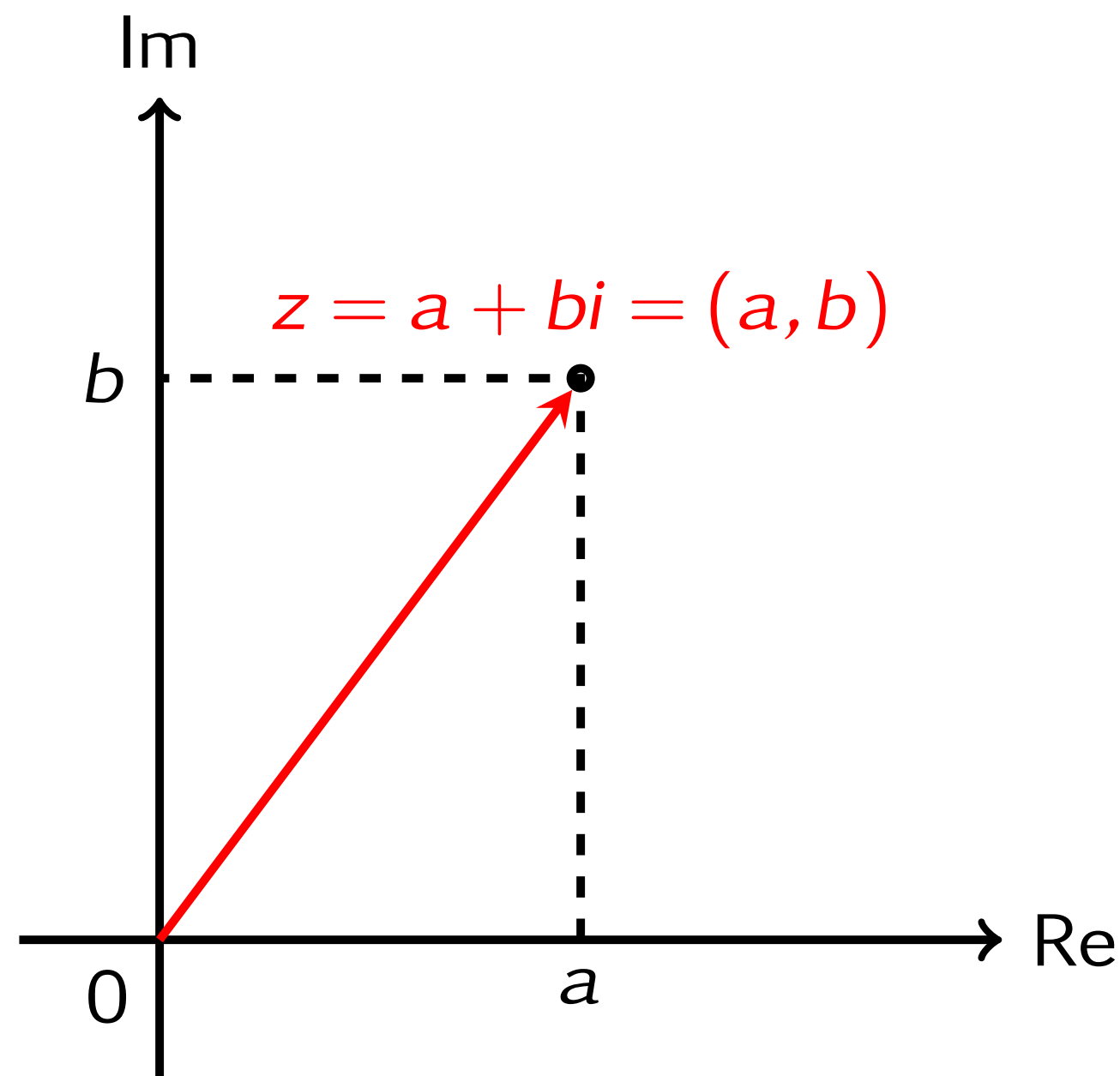
Le Plan de Gauß

Opérations sur les nombres complexes

Module d'un nombre complexe

Inverse d'un nombre complexe

On a vu que l'ensemble des nombres complexes  $\mathbb{C}$  est juste l'ensemble des points du plan  $\mathbb{R}^2$  qu'on a muni d'une opération particulière de produit. Lorsque le plan est vu comme l'ensemble des nombres complexes, on l'appelle *le plan de Gauß*:



La plupart des opérations sur les nombres complexes auront une interprétation géométrique dans ce plan.

# Contenu de la section

## Définitions et premières propriétés

Le Plan de Gauß

Opérations sur les nombres complexes

Module d'un nombre complexe

Inverse d'un nombre complexe

# Somme

Puisque les nombres complexes sont des couples de nombres réels, nous définissons:

## Définition

La **somme de deux nombre complexes**  $z = a + bi$  et  $z' = c + di$  est définie par

$$z + z' = (a + c) + (b + d)i.$$

L'addition de deux complexes vérifie **toutes les propriétés usuelles de l'addition sur  $\mathbb{R}$** , en particulier l'existence d'un opposé: pour tout  $z \in \mathbb{C}$ ,

$$z + (-z) = 0,$$

où 0 est le complexe nul  $0 = 0 + 0i$  et  $-z$  est le complexe obtenu à partir de  $z = a + bi$  comme:  $-z = -a - bi$ .

## Exemple

►  $(1 + i) + (2 + i) =$

►  $(-1 + i) + (3 - i) =$

►  $-1 + 2i + 1 + 2i =$

## Interprétation géométrique

Soit  $z_0 \in \mathbb{C}$ ,  $z_0 = a + bi$ . L'application  $z \mapsto z_0 + z$  correspond à une translation dans le plan de vecteur  $(a, b)$ .

## Exemple

- ▶  $(1 + i) + (2 + i) = 3 + 2i$
- ▶  $(-1 + i) + (3 - i) = 2$
- ▶  $-1 + 2i + 1 + 2i = 4i$

## Interprétation géométrique

Soit  $z_0 \in \mathbb{C}$ ,  $z_0 = a + bi$ . L'application  $z \mapsto z_0 + z$  correspond à une translation dans le plan de vecteur  $(a, b)$ .

# Produit

## Définition

Comme expliqué, le produit complexe sur  $\mathbb{C}$  est défini par :

$$(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i.$$

Dans le cas particulier où  $b = 0$  la multiplication de  $(c + di)$  par un réel  $a$  donne précisément le produit par un scalaire usuel sur  $\mathbb{R}^2$ .

La propriété fondamentale des nombres complexes est la suivante:

## Résultat

$$i^2 = -1.$$

Les nombres complexes sont ainsi un ensemble dans lequel on peut donner un sens à “la racine carrée de  $-1$ ”.

Le produit des nombres complexes a les mêmes propriétés que le produit sur  $\mathbb{R}$ :

## Résultat

Pour tous  $z, z', z'' \in \mathbb{C}$  :

- ▶  $(zz')z'' = z(z'z'')$  (associativité)
- ▶  $zz' = z'z$  (commutativité)
- ▶  $1z = z$  (existence d'un neutre : 1)
- ▶  $z(z' + z'') = zz' + zz''$  (distributivité par rapport à l'addition)
- ▶ Si  $z \neq 0$ , il existe  $z^{-1} \neq 0$  tel que  $zz^{-1} = 1$  (existence d'un inverse)

Toutes ces propriétés s'obtiennent immédiatement à partir de la définition; sauf l'existence de l'inverse  $z^{-1}$  que nous verrons dans un instant.

# Conséquences pratiques pour les calculs:

Connaissant ces règles pour le produit, on peut “oublier” la formule du produit complexe **et se contenter de distribuer et d'utiliser la règle  $i^2 = -1$**  :

$$\begin{aligned}(a + ib)(c + id) &= ac + aid + ibc + ibid \\ &= ac + i(ad + bc) + bdi^2 \\ &= ac - bd + i(ad + bc).\end{aligned}$$

## Exemple

- ▶  $12(2 + i) =$
- ▶  $(2 - i)(4 + i) =$
- ▶  $(1 + i)(1 + i) =$
- ▶  $(1 + i)(1 - i) =$

# Conséquences pratiques pour les calculs:

Connaissant ces règles pour le produit, on peut “oublier” la formule du produit complexe **et se contenter de distribuer et d'utiliser la règle  $i^2 = -1$**  :

$$\begin{aligned}(a + ib)(c + id) &= ac + aid + ibc + ibid \\ &= ac + i(ad + bc) + bdi^2 \\ &= ac - bd + i(ad + bc).\end{aligned}$$

## Exemple

- ▶  $12(2 + i) = 24 + 12i$
- ▶  $(2 - i)(4 + i) = 9 - 2i$
- ▶  $(1 + i)(1 + i) = 2i$
- ▶  $(1 + i)(1 - i) = 2$

# Conjugaison d'un nombre complexe

## Définition

Si  $z = a + ib$  est un nombre complexe, on définit son *conjugué* par

$$\bar{z} = a - ib.$$

## Exemple

Quelques exemples :

►  $\overline{2 + i} = 2 - i$

►  $\overline{2 - i} = 2 + i$

À partir de la définition on obtient:

## Résultat

Soit  $z = a + bi$  un nombre complexe. Alors:

$$a = \frac{z + \bar{z}}{2}, \quad b = \frac{z - \bar{z}}{2i}.$$

## Résultat

*La conjugaison complexe vérifie : pour tous  $z, z' \in \mathbb{C}$ ,*

- ▶  $\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z'}$
- ▶  $z = \overline{\bar{z}}$  (involutivité)
- ▶  $\overline{zz'} = \bar{z}\bar{z'}$
- ▶  $\overline{z^2} = \bar{z}^2$  ;  $\overline{z^3} = \bar{z}^3$  ; etc.

Ceci se démontre comme pour le produit en écrivant  $z = a + bi$ .

## Exemple

$$\overline{3 + 2i(1 - 5i)} = \bar{3} + \overline{2i(1 - 5i)} = 3 + \overline{2i(1 - 5i)} = 3 + (-2i)(1 + 5i) = 3 - 2i + 10 = 13 - 2i.$$

**Interprétation géométrique:** dans le plan de Gauss, le conjugué d'un point  $z$  est le symétrique de  $z$  par rapport à l'axe des abscisses.

# Contenu de la section

## Définitions et premières propriétés

Le Plan de Gauß

Opérations sur les nombres complexes

**Module d'un nombre complexe**

Inverse d'un nombre complexe

# Module d'un complexe

## Remarque

Si  $z = a + ib$ , alors

$$z\bar{z} = (a + ib)(a - ib) = a^2 - (ib)^2 = a^2 + b^2.$$

Le produit d'un nombre complexe avec son conjugué est donc **un nombre réel positif ou nul**, qui est nul si et seulement si  $z$  est le nombre complexe nul  $0 = 0 + 0i$ .

## Définition

Le **module** de  $z = a + bi$  est le nombre réel  $|z| := \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$ .

Le module de  $z = a + bi$  est aussi **la norme du vecteur  $(a, b)$  dans le plan**. En particulier, si  $z = a + 0i$  est réel, le module de  $z$  est  $\sqrt{a^2 + 0^2} = |a|$ . C'est la valeur absolue dans ce cas.

## Résultat

*Les propriétés suivantes sont vérifiées pour tous  $z, z' \in \mathbb{C}$  :*

- ▶  $|zz'| = |z||z'|$
- ▶  $|z + z'| \leq |z| + |z'|$
- ▶  $|z| \geq 0$
- ▶  $|z| = 0 \iff z = 0$

Les trois dernières propriétés viennent du fait que  $|a + bi|$  est la norme du vecteur  $(a, b)$  (en particulier la deuxième est l'inégalité triangulaire).

La première s'obtient en écrivant  $z = a + bi$  et  $z' = c + di$  et en calculant (essayez de le faire).

# Contenu de la section

## Définitions et premières propriétés

Le Plan de Gauß

Opérations sur les nombres complexes

Module d'un nombre complexe

Inverse d'un nombre complexe

# Inverse d'un complexe

Nous avons annoncé que chaque nombre complexe non-nul  $z$  admettait un inverse. On va le calculer ici.

Soit  $z = a + bi$ . Comme  $z$  est **non-nul**, on a  $a^2 + b^2 > 0$ . Comme

$$|z|^2 = z\bar{z} = a^2 + b^2$$

nous en déduisons

$$z \frac{\bar{z}}{a^2 + b^2} = 1.$$

Ceci montre que l'inverse de  $z$ , **encore noté**  $\frac{1}{z}$  ou  $z^{-1}$ , est donné par:

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{a^2 + b^2} = \frac{a - bi}{a^2 + b^2}.$$

Concrètement, l'inverse d'un nombre complexe se calcule en multipliant en haut et en bas par le conjugué du dénominateur.

## Exemple

On veut calculer l'inverse de  $5 - i$ . Le conjugué de  $5 - i$  est  $5 + i$  et on écrit donc:

$$\frac{1}{5 - i} = \frac{1}{5 - i} \times \frac{5 + i}{5 + i} = \frac{5 + i}{(5 - i)(5 + i)} = \frac{5 + i}{5^2 - (i^2)} = \frac{5}{26} + \frac{i}{26}.$$

# Contenu de la section

Forme polaire ou trigonométrique

# Contenu de la section

Forme polaire ou trigonométrique

Argument d'un nombre complexe

Notation exponentielle

# Argument d'un complexe

Soit  $z = a + bi$  un nombre complexe, avec  $a, b \in \mathbb{R}$ . On décide de repérer le vecteur  $(a, b)$  dans  $\mathbb{R}^2$  **par ses coordonnées polaires**:

$$(a, b) = (\rho \cos(\theta), \rho \sin(\theta)) = \rho(\cos(\theta), \sin(\theta)), \quad \text{avec } \theta \in [0, 2\pi[.$$

On sait déjà que, par définition du module,  $\rho = |z|$ .

## Définition

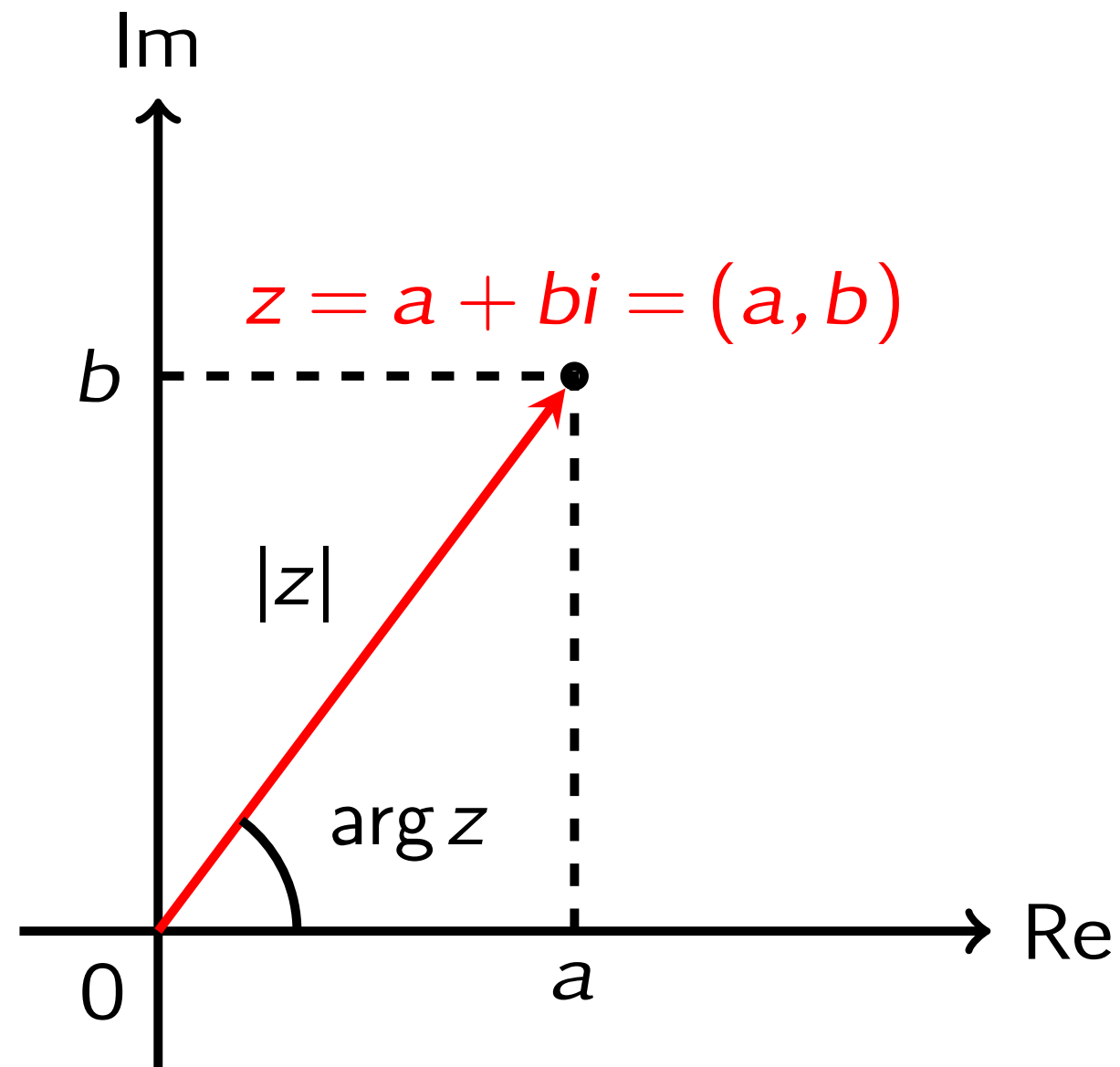
*L'argument* du nombre complexe  $z$ , noté  $\arg z$ , est l'angle  $\theta$  lorsqu'on voit  $z$  comme un point du plan de Gauß.

## Remarque

La mesure de cet angle n'est définie qu'à un multiple entier de  $2\pi$  près. Généralement on prend  $\arg z$  entre 0 et  $2\pi$  (on parle alors de **détermination principale de l'argument**).

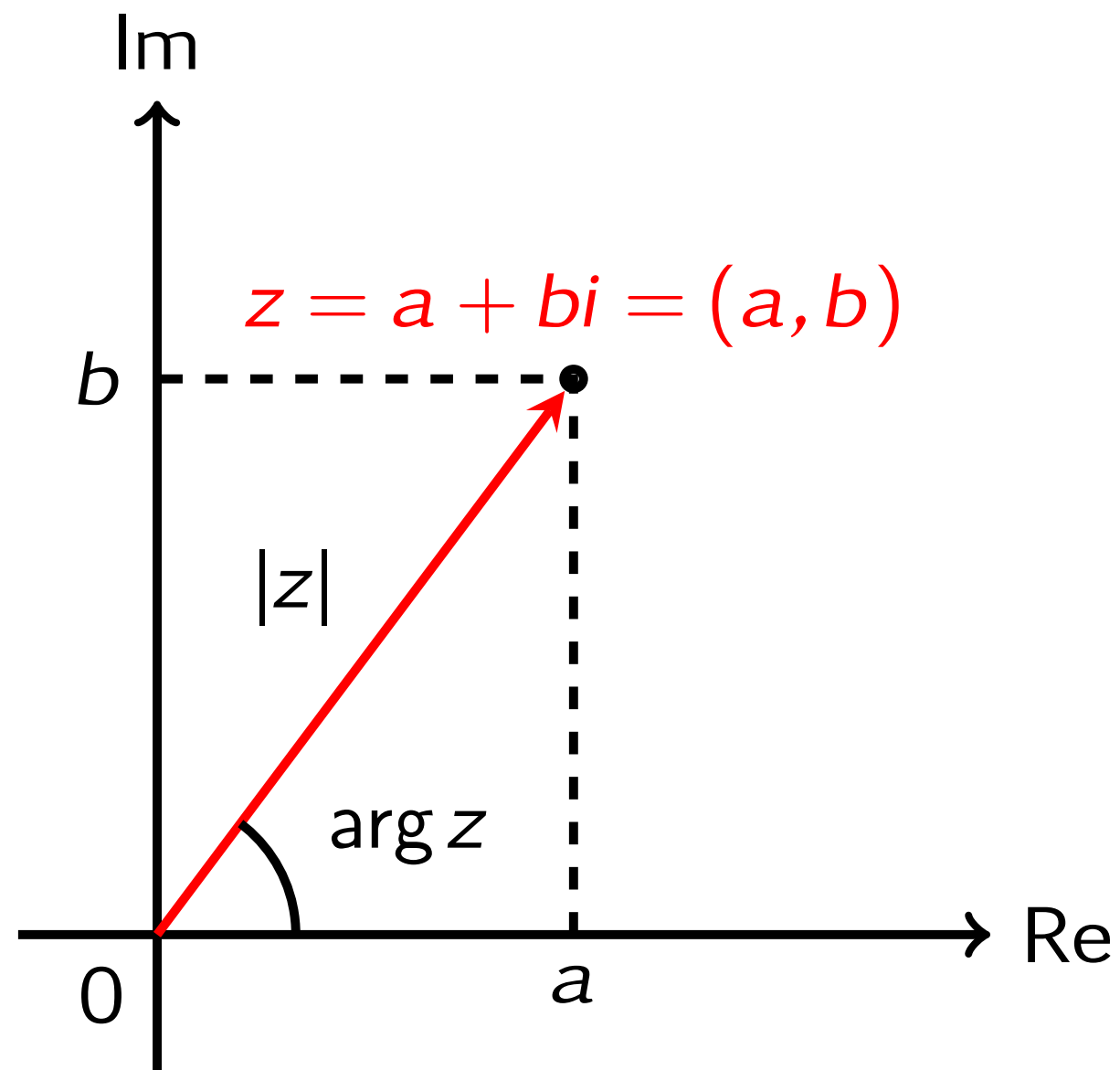
**Attention:** l'argument du nombre complexe nul **n'est pas défini**.

# Illustration dans le plan de Gauss



## Exemple

Le nombre complexe  $z = \rho(\cos \theta + i \sin \theta)$  a pour argument  $\theta$  et pour module  $\rho$ . (C'est juste une autre manière de dire que les coordonnées polaires de  $z \in \mathbb{R}^2$  sont  $(\rho, \theta)$ .)



## Exemple

Voici la détermination principale des arguments de quelques complexes :

- ▶  $\arg i = \frac{\pi}{2}$
- ▶  $\arg r = 0$  si  $r$  est un réel positif
- ▶  $\arg r = \pi$  si  $r$  est un réel strictement négatif
- ▶  $\arg(1 + i) = \frac{\pi}{4}$

# Comment déterminer l'argument d'un nombre complexe?

Comme  $(|z|, \arg z)$  sont les coordonnées polaires de  $z \in \mathbb{R}^2$  on peut écrire:

$$z = |z| \left( \cos(\arg z) + i \sin(\arg z) \right) = a + ib.$$

On se sert de cette formule pour trouver l'argument d'un complexe  $z = a + ib$ :

- ▶ On commence par calculer  $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$
- ▶ On en déduit la valeur de l'argument, qui vérifie:

$$\cos(\arg(z)) = \frac{a}{|z|} \quad \text{et} \quad \sin(\arg(z)) = \frac{b}{|z|}.$$

## Exemple

On va déterminer le module et l'argument du complexe  $z = -1 - i$ .

Le module de  $z$  est donné par:

$$|z| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}.$$

L'argument  $\theta$  de  $z = -1 - i$  vérifie alors:

$$\cos \theta = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \sin \theta = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Ceci donne donc, à  $2\pi$  près:

$$\theta = \frac{5\pi}{4}.$$

On retrouve la valeur de l'argument en représentant ce complexe dans le plan de Gauss.

# Propriétés de l'argument

## Résultat

*Pour des complexes  $z$  et  $z'$  (à un multiple entier de  $2\pi$  près) :*

$$\arg(zz') = \arg z + \arg z'.$$

*En particulier:*

$$\arg \bar{z} = -\arg z \quad \text{et} \quad \arg(-z) = \pi + \arg z.$$

Nous admettons la preuve de ces propriétés. Toutes ces propriétés se retrouvent en représentant graphiquement les nombres complexes en question dans le plan de Gauss.

# Contenu de la section

Forme polaire ou trigonométrique

Argument d'un nombre complexe

Notation exponentielle

# Forme polaire et notation exponentielle

Dans le plan de Gauß, un complexe  $z$  représente un point. Le passage des coordonnées polaires  $(\rho, \theta)$  aux coordonnées cartésiennes  $(a, b)$  donne deux formules équivalentes:

$$a + bi = \rho(\cos(\theta) + i \sin(\theta))$$

## Définition

La première formule  $a + ib$  est appelée *forme cartésienne*, et la seconde est la *forme polaire*.

La forme exponentielle permet de raccourcir la forme polaire:

## Définition

On *définit*, pour  $\theta \in \mathbb{R}$ :

$$\exp(i\theta) := \cos(\theta) + i \sin(\theta).$$

et on peut alors noter  $z$  sous *forme exponentielle* :

$$z = \rho \exp(i\theta), \quad \text{avec } \rho > 0 \text{ et } \theta \in [0, 2\pi[$$

## Remarque

- ▶ Si  $z = \rho \exp(i\theta)$ , à  $2\pi$  près, on a bien  $\theta = \arg(z)$ .
- ▶ Avec cette définition,  $\exp(i\theta)$  est défini pour tout  $\theta \in \mathbb{R}$ , et on a:

$$\exp(i(\theta + 2\pi)) = \exp(i\theta).$$

- ▶ De même:

$$\exp(i(\theta + \pi)) = -\exp(i\theta).$$

- ▶ La notation  $z = \rho \exp(i\theta)$  n'est utilisée que si  $\rho > 0$ .

## Exemple

$$1 = \exp(i0), \quad i = \exp\left(i\frac{\pi}{2}\right), \quad -1 = \exp(i\pi), \quad 1 + \sqrt{3}i = 2 \exp\left(i\frac{\pi}{3}\right).$$

On vérifie ces égalités en calculant explicitement ce qui se cache dans la notation exponentielle (en revenant à la définition).