

Nombres complexes 2

(Syllabus Chapitre XIX, parties 4 à la fin)

Rappel – Forme polaire et notation exponentielle

Dans le plan de Gauß, un complexe z représente un point. Le passage des coordonnées polaires (ρ, θ) aux coordonnées cartésiennes (a, b) donne deux formules équivalentes:

$$a + bi = \rho(\cos(\theta) + i \sin(\theta))$$

La première formule $a + ib$ est appelée *forme cartésienne* et la seconde est la *forme polaire*.

La forme exponentielle permet de raccourcir la forme polaire: On définit, pour $\theta \in \mathbb{R}$:

$$\exp(i\theta) := \cos(\theta) + i \sin(\theta).$$

Si $z \neq 0$ on peut alors noter z sous *forme exponentielle*:

$$z = \rho \exp(i\theta), \quad \text{avec } \rho = |z| > 0 \text{ et } \theta \in [0, 2\pi[$$

Le nombre complexe 0 n'admet pas de forme polaire. $\exp(i\theta)$ se notera souvent aussi $e^{i\theta}$.

Contenu de la section

Forme exponentielle d'un nombre complexe

Contenu de la section

Forme exponentielle d'un nombre complexe

Propriétés de la forme exponentielle

Expression de sin et cos en fonction de $\exp(ix)$.

Exponentielle complexe

Intérêt de la forme exponentielle

Résultat

Si $z = \rho \exp(i\theta)$ et $z' = \rho' \exp(i\theta')$ sont deux nombres complexes sous forme exponentielle, et si n un entier, on a :

1. $\bar{z} = \rho \exp(-i\theta)$
2. $\frac{1}{z} = \frac{1}{\rho \exp(i\theta)} = \frac{1}{\rho} \exp(-i\theta)$
3. $(\rho \exp(i\theta))(\rho' \exp(i\theta')) = \rho\rho' \exp(i(\theta + \theta'))$
4. $(\rho \exp(i\theta))^n = \rho^n \exp(in\theta).$

La dernière formule prend parfois le nom de **formule de De Moivre**.

Avec la notation exponentielle, les opérations décrites deviennent de simples applications des règles sur les exposants.

Et l'exponentielle $\exp(i\theta)$ se comporte vraiment comme une exponentielle.

On va démontrer la propriété 4 (la formule de De Moivre).

$$(\rho \exp(i\theta))^n = \rho^n \exp(in\theta)$$

.

Preuve (Preuve de la formule de De Moivre.)

Montrons *par récurrence* la formule de De Moivre:

$$(\rho \exp(i\theta))^n = \rho^n \exp(in\theta) \quad \forall n \geq 1.$$

Initialisation: La formule est vraie pour $n = 1$ puisque les deux membres sont égaux pour cette valeur de n .

Hypothèse: supposons maintenant que la formule est vraie *pour un certain entier n fixé*.

Thèse: Montrons alors que la formule est encore vraie pour l'entier $n + 1$. Pour ça, *on calcule* $(\rho \exp(i\theta))^{n+1}$:

$$\begin{aligned}(\rho \exp(i\theta))^{n+1} &= (\rho \exp(i\theta))(\rho \exp(i\theta))^n \\&= (\rho \exp(i\theta))(\rho^n \exp(in\theta)) \\&= \rho \rho^n \exp(i(\theta + n\theta)) \\&= \rho^{n+1} \exp(i(n+1)\theta)\end{aligned}$$

où nous avons utilisé l'hypothèse de récurrence *à la deuxième ligne*. Ceci prouve la formule de De Moivre pour n entier naturel. On prouve la formule pour les entiers négatifs en utilisant la conjugaison.

Interprétation géométrique du produit complexe:

Si $a + bi$ est un nombre complexe, on considère les coordonnées polaires de (a, b) :

$$(a, b) = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta),$$

avec $\rho \geq 0$ et $\theta \in [0, 2\pi[$.

Alors $(x, y) \mapsto (a, b)(x, y)$ est la composée de :

- ▶ une rotation centrée en l'origine d'angle θ , et
- ▶ une homothétie de rapport ρ .

Remarquez que les autres propriétés de $\exp i\theta$ se déduisent de la définition: par exemple

$$\overline{\exp i\theta} = \overline{\cos(\theta) + i \sin(\theta)} = \cos(\theta) - i \sin(\theta) = \cos(-\theta) + i \sin(-\theta) = \exp(-i\theta).$$

Contenu de la section

Forme exponentielle d'un nombre complexe

Propriétés de la forme exponentielle

Expression de sin et cos en fonction de $\exp(ix)$.

Exponentielle complexe

Expression des fonctions trigonométriques

Pour $x \in \mathbb{R}$, et par définition de $\exp(ix)$, on a:

$$\exp(ix) = \cos x + i \sin x$$

$$\exp(-ix) = \cos(-x) + i \sin(-x) = \cos x - i \sin x.$$

Nous en déduisons, par addition et soustraction :

$$\cos(x) = \frac{\exp(ix) + \exp(-ix)}{2}, \quad \sin(x) = \frac{\exp(ix) - \exp(-ix)}{2i}$$

(Attention au i en plus au dénominateur de l'expression de $\sin x$!).

Ces expressions permettent de passer facilement des fonctions $\exp(ix)$, naturelles quand on travaille avec des nombres complexes, aux fonctions $\cos$ et $\sin$.

Contenu de la section

Forme exponentielle d'un nombre complexe

Propriétés de la forme exponentielle

Expression de sin et cos en fonction de $\exp(ix)$.

Exponentielle complexe

Exponentielle complexe

Nous savons calculer l'exponentielle de tout nombre réel; depuis peu nous savons aussi calculer $\exp(i\theta)$ comme:

$$\exp(i\theta) = \cos(\theta) + i \sin(\theta).$$

La définition s'étend naturellement pour calculer l'exponentielle d'un nombre complexe:

Définition

Si $z = a + ib$ est un nombre complexe, avec $a, b \in \mathbb{R}$, nous définissons :

$$\exp z = \exp(a + ib) := \exp(a) \exp(ib).$$

Dans cette définition $\exp a$ désigne l'exponentielle réelle habituelle puisque $a \in \mathbb{R}$. Si $z \in \mathbb{C}$, $\exp z$ est en général un nombre complexe.

Cette nouvelle application $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} : z \mapsto \exp z$ vérifie encore:

$$\exp z \exp z' = \exp(z + z').$$

pour tous complexes z, z' (attention on multiplie ici des nombres complexes).

Contenu de la section

Équations polynomiales et nombres complexes

Nombres complexes et équations polynomiales

Dès lors que nous avons de nouveaux nombres (ici: les complexes) nous pouvons résoudre des équations qui les impliquent.

Ce fut d'ailleurs la raison principale de l'introduction des nombres complexes par Cardan en 1545: s'en servir comme raccourci pour résoudre des équations polynomiales.

Contenu de la section

Équations polynomiales et nombres complexes

Équations du premier degré

Racines carrées

Équations du second degré

Racines n -èmes d'un nombre complexe

Équations du premier degré

Considérons l'équation d'inconnue $z \in \mathbb{C}$ suivante :

$$az + b = 0$$

où $a, b \in \mathbb{C}$ sont des constantes données, avec $a \neq 0$.

Sa solution est

$$z = -\frac{b}{a},$$

car les règles d'addition de multiplication par les complexes sont identiques aux règles sur les réels. (Attention: ici $\frac{1}{a}$ est l'inverse d'un nombre complexe, qui se calcule comme on l'a vu.)

Contenu de la section

Équations polynomiales et nombres complexes

Équations du premier degré

Racines carrées

Équations du second degré

Racines n -èmes d'un nombre complexe

Racines carrées de nombres complexes

Rappel

Si $r \in \mathbb{R}^+$, $\sqrt{r}$ est l'unique nombre réel positif dont le carré vaut r .

Dans $\mathbb{C}$, en revanche, il n'existe pas de notion de "positif" ou "négatif".

La notation $\sqrt{z}$ n'est en général pas définie pour $z \in \mathbb{C}$.

Cependant, pour un $z \in \mathbb{C}$ donné nous pouvons parler des racines carrées (ou cubiques, etc.) de z .

Définition

Un complexe z est une racine carrée d'un autre complexe $a + bi$ si $z^2 = a + ib$. Dans ce cas $-z$ est aussi une racine carrée de $a + bi$.

Résultat

Tout nombre complexe non nul z admet deux racines carrées.

Exemple

i et $-i$ sont des racines carrées de -1 , car $i^2 = (-i)^2 = -1$ par définition.

Exemple

On va déterminer toutes les racines carrées de $3 + 4i$.

Notons $a + bi$ une racine carrée de $3 + 4i$, avec a et b réels. En écrivant $(a + bi)^2 = a^2 - b^2 + 2abi = 3 + 4i$, on résout :

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = 3 \\ 2ab = 4. \end{cases}$$

Ceci donne $ab = 2$. Ensuite, en multipliant la première équation par a^2 et en utilisant que $a^2b^2 = 4$, on obtient: $a^4 - a^2b^2 = 3a^2$, soit $a^4 - 3a^2 - 4 = 0$.

On voit cette équation comme une équation du second degré pour a^2 et on trouve $a^2 = 4$ (on ne garde que la solution positive), d'où on déduit que $a = 2$ ou $a = -2$. Comme $ab = 2$, les solutions sont donc :

$$z = -2 - i \quad \text{et} \quad z = 2 + i.$$

Contenu de la section

Équations polynomiales et nombres complexes

Équations du premier degré

Racines carrées

Équations du second degré

Racines n -èmes d'un nombre complexe

Équations du second degré

Considérons l'équation

$$az^2 + bz + c = 0 \quad \text{où } a, b, c \in \mathbb{C} \text{ et } a \neq 0$$

Nous réécrivons le membre de gauche comme:

$$\begin{aligned} az^2 + bz + c &= a \left(z^2 + 2 \frac{b}{2a} z + \frac{c}{a} \right) \\ &= a \left(\left(z + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{c}{a} - \left(\frac{b}{2a} \right)^2 \right) \\ &= a \left[\left(z + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right]. \end{aligned}$$

Notons ω une racinée carrée de $b^2 - 4ac$ (c'est-à-dire que $\omega^2 = b^2 - 4ac$). Alors, comme $a \neq 0$, z vérifie $az^2 + bz + c = 0$ si et seulement si elle vérifie

$$\left(z + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\omega^2}{4a^2} = 0$$

et donc si et seulement si

$$z = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\omega}{2a}.$$

Exemple

On cherche toutes les solutions complexes de l'équation

$$z^2 - iz + 2 = 0.$$

Le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$ de l'équation vaut ici

$$\Delta = (-i)^2 - 4 \times 2 = -9,$$

et une racine carrée de Δ est par exemple $3i$. Les solutions de l'équation sont donc données par

$$z = \frac{i \pm 3i}{2},$$

c'est-à-dire:

$$z = -i \quad \text{et} \quad z = 2i.$$

Nombre de racines d'une équation du deuxième degré

Si $P(z) = az^2 + bz + c$, nous appellerons **racine de P** tout nombre complexe z tel que $P(z) = 0$.

Remarque

Si $b^2 - 4ac = 0$, **et donc $\omega = 0$** , la méthode précédente ne produit qu'une seule racine de P , dite "racine double" ou "de multiplicité 2".

Si nous admettons qu'une telle racine compte pour deux nous avons montré le résultat suivant :

Théorème

Tout polynôme de degré 2 **admet exactement 2 racines complexes (comptées avec multiplicité)**.

Contenu de la section

Équations polynomiales et nombres complexes

Équations du premier degré

Racines carrées

Équations du second degré

Racines n -èmes d'un nombre complexe

Racines n -èmes

Rappel

On ne parle jamais de **la** racine carrée (ou cubique, etc...) d'un nombre complexe, mais **des** racines.

Définition

Soit un entier $n \geq 1$ et z un complexe. On appelle **racine n -ème de z** tout nombre complexe w tel que $w^n = z$.

Exemple

- ▶ i est **racine quatrième de 1**: car $i^4 = (i^2)^2 = (-1)^2 = 1$. $-i$ aussi.
- ▶ Si $\rho > 0$ est un nombre réel, $\rho^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{\rho}$ (la racine n -ème dans $\mathbb{R}$) est encore une racine n -ème dans $\mathbb{C}$.
- ▶ Si $z = \exp(i\theta)$, alors **$\exp\left(i\frac{\theta}{n}\right)$ est une racine n -ème de z** : car

$$\left(\exp\left(i\frac{\theta}{n}\right)\right)^n = \exp\left(ni\frac{\theta}{n}\right) = \exp(i\theta).$$

Expression des racines n -ème

Le théorème suivant donne une manière pratique de calculer des racines n -ème à partir de la forme polaire:

Théorème

Si z est donné sous forme polaire $z = \rho \exp(i\theta)$ ($\rho \geq 0$), alors ses racines n -ème sont données par les complexes $w_0, \dots, w_{n-1}$ définis par:

$$w_k = \sqrt[n]{\rho} \exp\left(i \frac{(\theta + 2k\pi)}{n}\right) \quad \text{où } k = 0, \dots, n-1$$

En particulier, si $z \neq 0$, il y a exactement n racines n -ème de z .

Il y a deux choses à démontrer dans ce théorème :

- ▶ que chaque w_k , pour un k entre 0 et $n-1$, est bien une racine n -ème de z
- ▶ et qu'il n'y en a pas d'autres.

Preuve du théorème.

Rappel

$$w_k = \sqrt[n]{\rho} \exp\left(i \frac{(\theta + 2k\pi)}{n}\right) \quad \text{où } k = 0, \dots, n-1$$

Preuve

On commence par vérifier que chaque w_k est une racine n -ème de $z = \rho \exp(i\theta)$. En effet:

$$\begin{aligned} w_k^n &= \left(\sqrt[n]{\rho} \exp\left(i \frac{(\theta + 2k\pi)}{n}\right) \right)^n \\ &= (\sqrt[n]{\rho})^n \exp\left(ni \frac{(\theta + 2k\pi)}{n}\right) \\ &= \rho \exp(i(\theta + 2k\pi)) \\ &= \rho \exp(i\theta) = z. \end{aligned}$$

Preuve (Suite de la preuve)

Pour le second point, considérons w une racine n -ème de $z = \rho \exp(i\theta)$ que nous écrivons sous la forme:

$$w = r \exp(i\varphi).$$

Alors $w^n = r^n \exp(in\varphi) = \rho \exp(i\theta)$, et en particulier $|w^n| = r^n = \rho$. Ceci montre déjà que $r = \sqrt[n]{\rho}$.

Par ailleurs, puisque $w^n = z$ et $\rho = r^n$, on a alors $\exp(in\varphi) = \exp(i\theta)$.

$$\cos(n\varphi) = \cos(\theta) \quad \text{et} \quad \sin(n\varphi) = \sin(\theta)$$

Or deux angles ont même sinus et même cosinus si et seulement si ils sont égaux à 2π près : dès lors, $n\varphi = \theta + 2k\pi$ pour un certain $k \in \mathbb{Z}$, d'où

$$\varphi = \frac{\theta + 2k\pi}{n} \quad \text{pour } k \in \mathbb{Z}.$$

Preuve (Fin de la preuve)

Pour l'instant, on a donc montré que toute racine n -ème de $z = \rho \exp(i\theta)$ est de la forme

$$w_k = \sqrt[n]{\rho} \exp\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)$$

pour un certain $k \in \mathbb{Z}$. Il reste à vérifier *qu'il suffit de se limiter à k compris entre 0 et $n-1$.*

Pour cela, remarquons simplement l'égalité :

$$\begin{aligned} w_{k+n} &= \sqrt[n]{\rho} \exp\left(i \frac{\theta + 2(k+n)\pi}{n}\right) \\ &= \sqrt[n]{\rho} \exp\left(i \left(\frac{\theta + 2k\pi}{n} + 2\pi\right)\right) \\ &= \sqrt[n]{\rho} \exp\left(i \frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) \\ &= w_k. \end{aligned}$$

Donc, quelle que soit la valeur de k , w_k se trouve parmi $w_0, w_1, \dots, w_{n-1}$.

Les racines de l'unité

Un cas particulier est $z = 1$. Dans ce cas, les racines n -èmes de 1 sont appelées **racines n -ème de l'unité** et sont données par :

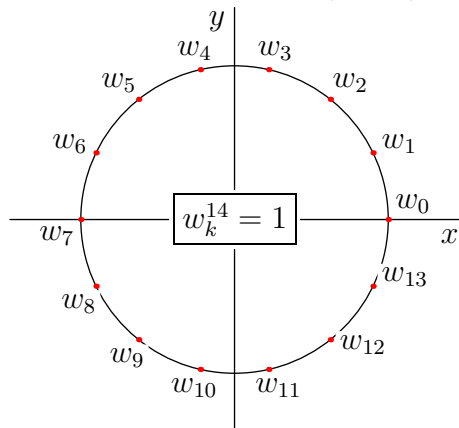
$$w_k = \exp\left(i \frac{2k\pi}{n}\right) \quad \text{où } k = 0, \dots, n-1.$$

Ce sont toutes les solutions de l'équation

$$z^n = 1.$$

Nous pouvons les représenter géométriquement : ce sont les sommets d'un **polygone régulier à n côtés** centré en 0.

On voit par exemple que les racines 4-èmes de 1 sont **$1, i, -1, -i$** : les sommets d'un carré centré en 0.



Connaître les racines n -èmes de l'unité sert à déterminer les racines n -èmes des autres nombres complexes. Pour ceci, il suffit de trouver une racine n -ème et de la multiplier par les n racines n -èmes de l'unité.

Exemple

On va déterminer les 4 racines 4-èmes de i .

En écrivant $i = \exp\left(i\frac{\pi}{2}\right)$, on voit qu'une racine 4-ème est donnée par $\exp\left(i\frac{\pi}{8}\right)$. Les 4 racines 4-èmes de i sont données par:

$$w_k = \exp\left(i\left(\frac{\pi}{8} + \frac{2k\pi}{4}\right)\right) \quad \text{pour } 0 \leq k \leq 3.$$

Ces racines sont donc:

$$\exp\left(i\frac{\pi}{8}\right), \quad \exp\left(i\left(\frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2}\right)\right) = \exp\left(i\frac{5\pi}{8}\right),$$

$$\exp\left(i\left(\frac{\pi}{8} + \pi\right)\right) = -\exp\left(i\frac{\pi}{8}\right), \quad \exp\left(i\left(\frac{\pi}{8} + \frac{3\pi}{2}\right)\right) = \exp\left(-i\frac{3\pi}{8}\right).$$

Contenu de la section

Une application des nombres complexes: fonctions réelles à valeurs complexes

Fonctions réelles à valeurs complexes

Une fonction réelle à valeurs complexes est **une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$** . Comme $\mathbb{C}$ est identifiable à $\mathbb{R}^2$, un certain nombre de définitions se transposent aisément du cas

“fonction réelle à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ ”

au cas

“fonction réelle à valeurs complexes”.

En particulier la notion de dérivée: pour dériver une fonction à valeurs complexes, **il suffit de dériver en considérant que i est une constante**.

Ceci revient effectivement à dériver “composante par composante”.

Exemple

Dérivons la fonction y définie par

$$y(x) = \exp(\lambda x),$$

où $x \in \mathbb{R}$ et $\lambda \in \mathbb{C}$. Écrivons $\lambda = a + ib$: alors, par définition de l'exponentielle complexe,

$$y(x) = \exp(ax + ibx) = \exp(ax)(\cos bx + i \sin(bx)).$$

La dérivée de y vaut alors :

$$y'(x) = a \exp(ax)(\cos(bx) + i \sin(bx)) + \exp(ax)(-b \sin(bx) + bi \cos(bx))$$

ce que nous pouvons ré-écrire comme:

$$y'(x) = a \exp(ax) \exp(ibx) + bi \exp(ax)(i \sin(bx) + \cos(bx))$$

et donc

$$y'(x) = (a + bi) \exp(ax) \exp(ibx) = \lambda \exp(\lambda x) = \lambda y(x).$$

Cet exemple montre que la fonction exponentielle complexe **suit la même propriété de dérivation que l'exponentielle réelle.**