

Équations différentielles Ordinaires 2

(Syllabus Chapitre XVIII, parties 2.4 à 3.1)

Contenu de la section

ÉDO linéaires du premier ordre

Contenu de la section

ÉDO linéaires du premier ordre

Définitions

Étape 1 – Résolution de l'équation linéaire homogène associée (ÉLHA)

Étape 2 – Solution particulière: la méthode de la variation de la constante

Étape 3 – Écrire la solution générale de l'équation linéaire

Étape 4 – Déterminer la valeur de la constante d'intégration grâce aux conditions initiales.

Un exemple de résolution d'équation linéaire du premier ordre

ÉDO linéaires du premier ordre

Définition

Une équation différentielle *du premier ordre* est dite *linéaire* si elle est écrite sous la forme :

$$q(x)y' + p(x)y = f(x) \quad (\text{EL})$$

où p, q, f sont des fonctions (de x) données.

- ▶ Les fonctions p et q sont appelés *les coefficients*. Ces coefficients sont parfois constants (c'est-à-dire qu'ils ne dépendent pas de x) mais en général ce sont des fonctions de x .
- ▶ La fonction f est appelée le “*second membre*” de l'équation.

Définition

Si $f(x) = 0, \forall x$ on dit que l'équation *est linéaire homogène*. À l'équation (EL) on associe souvent la même équation avec $f = 0$, qu'on appelle *équation linéaire homogène associée* (ELHA):

$$q(x)y' + p(x)y = 0.$$

Des exemples

Exemple

- ▶ $2y' + y = 0$ (linéaire, homogène, à coefficients constants)
- ▶ $2y' + y = x^2$ (linéaire, non-homogène, à coefficients constants)
- ▶ $2xy' + y = 1$ (linéaire, non-homogène, à coefficients non-constants)

Nous allons voir dans la suite une méthode générale pour résoudre toutes les équations **linéaires** d'ordre 1.

Rôle de l'équation homogène

Notre but est de trouver **toutes** les solutions de l'équation linéaire:

$$q(x)y' + p(x)y = f(x). \quad (\text{EL})$$

Supposons qu'on connaisse **une** solution particulière de cette équation linéaire (SPEL), notons-la y_{SPEL} . Soit y une autre solution de (EL), et soit $z = y - y_{\text{SPEL}}$. Nous pouvons calculer $q(x)z' + p(x)z$:

$$\begin{aligned} q(x)z' + p(x)z &= q(x)(y - y_{\text{SPEL}})' + p(x)(y - y_{\text{SPEL}}) \\ &= q(x)y' - q(x)y'_{\text{SPEL}} + p(x)y - p(x)y_{\text{SPEL}} \\ &= (q(x)y' + p(x)y) - (q(x)y'_{\text{SPEL}} + p(x)y_{\text{SPEL}}) \\ &= f(x) - f(x) = 0. \end{aligned}$$

En d'autres termes: **z est une solution de l'équation linéaire homogène associée (ÉLHA).**

Ainsi: si on connaît **une** solution particulière de l'équation (EL) et **toutes** les solutions de l'équation homogène (qui est plus simple!), on connaîtra toutes les solutions de (EL).

Méthode générale de résolution d'une équation linéaire

L'observation précédente nous permet de décomposer la résolution d'une équation linéaire en 4 étapes successives:

1. Résolution de l'équation linéaire homogène associée (avec $f \equiv 0$).
Le but est de trouver **toutes** les solutions de l'équation homogène.
2. Trouver **une** solution particulière de l'équation linéaire, avec f .
3. Écrire la solution générale de l'équation linéaire comme la somme de la solution particulière de l'équation linéaire et de la solution générale de l'équation homogène
4. (si requise) Déterminer une solution exacte grâce aux conditions initiales d'un problème de Cauchy

Nous allons voir des méthodes pour effectuer chacune de ces étapes.

Contenu de la section

ÉDO linéaires du premier ordre

Définitions

Étape 1 – Résolution de l'équation linéaire homogène associée (ÉLHA)

Étape 2 – Solution particulière: la méthode de la variation de la constante

Étape 3 – Écrire la solution générale de l'équation linéaire

Étape 4 – Déterminer la valeur de la constante d'intégration grâce aux conditions initiales.

Un exemple de résolution d'équation linéaire du premier ordre

L'équation linéaire homogène associée (ÉLHA) est l'équation où on a remplacé f par 0 :

$$q(x)y' + p(x)y = 0. \quad (\text{ÉLHA})$$

C'est une équation à variables séparables quand on la réécrit comme:

$$\frac{y'}{y} + \frac{p(x)}{q(x)} = 0.$$

En écrivant $y' = \frac{dy}{dx}$ elle se résout donc comme:

$$\int \frac{dy}{y} = - \int \frac{p(x)}{q(x)} dx \quad \text{et donc} \quad \ln|y(x)| = \tilde{C} - \Phi(x)$$

où Φ est une primitive de $\frac{p(x)}{q(x)}$. Ceci donne encore, comme l'exponentielle ne s'annule jamais:

$$y_{SGEH}(x) = C \exp(-\Phi(x)) \quad \text{où } \Phi(x) = \int \frac{p(x)}{q(x)} dx$$

et $C = \pm e^{\tilde{C}}$ est une constante d'intégration. Le sigle SGEH signifie : solution **g**énérale de l'équation homogène. "Générale" car nous avons de la sorte **toutes les solutions de l'équation (ÉLHA)** (une solution pour chaque valeur de C).

Un exemple

Exemple

On va déterminer la solution générale de l'équation homogène

$$y' - \frac{2}{x}y = 0.$$

On commence par mettre l'équation sous forme séparée:

$$\frac{y'}{y} - \frac{2}{x} = 0.$$

On la résout alors en intégrant:

$$\int \frac{dy}{y} - 2 \int \frac{dx}{x} = 0 \iff \ln|y| - 2\ln|x| = \tilde{C}$$

$$\iff \ln|y| - \ln(x^2) = \tilde{C}$$

$$\iff y(x) = Cx^2$$

avec $C = \pm \exp(\tilde{C})$.

Contenu de la section

ÉDO linéaires du premier ordre

Définitions

Étape 1 – Résolution de l'équation linéaire homogène associée (ÉLHA)

Étape 2 – Solution particulière: la méthode de la variation de la constante

Étape 3 – Écrire la solution générale de l'équation linéaire

Étape 4 – Déterminer la valeur de la constante d'intégration grâce aux conditions initiales.

Un exemple de résolution d'équation linéaire du premier ordre

Trouver des solutions particulières de l'équation linéaire

Rappelons que, maintenant qu'on connaît toutes les solutions de l'équation homogène, connaître **une solution particulière** de l'équation linéaire permet de trouver toutes les solutions de l'équation.

Il arrive dans certains cas qu'une solution particulière apparaisse de manière évidente. Nul besoin dans ce cas d'aller chercher plus loin.

Exemple

L'équation $\exp(x^2)y' + y = 1$ admet une solution évidente : **$y(x) = 1$** . En effet, pour ce choix de y , $y'(x) = 0$ et donc l'équation est satisfaite.

Il existe toutefois une méthode qui permet de s'en sortir à chaque fois : la méthode de **variation de la constante**.

Méthode de variation de la constante

L'idée est de chercher une solution particulière sous la forme:

$$y_{SPEL} = u(x) \exp(-\Phi(x)), \quad \text{où } \Phi(x) = \int \frac{p(x)}{q(x)} dx$$

où u n'est plus une constante mais **une fonction à déterminer**.

Nous reconnaissons ici l'expression de y_{SPEL} où nous avons **remplacé la constante par une fonction inconnue**.

La fonction y_{SPEL} ci-dessus est solution de l'équation (EL) si et seulement si:

$$q(x)y'_{SPEL} + p(x)y_{SPEL} = f(x)$$

c'est-à-dire si

$$q(x)\left(u' \exp(-\Phi(x)) - \frac{p(x)}{q(x)} u \exp(-\Phi(x))\right) + p(x) u \exp(-\Phi(x)) = f(x)$$

ou encore, puisque les deux derniers termes se simplifient, si :

$$q(x)u' \exp(-\Phi(x)) = f(x)$$

dont on tire l'expression de u :

$$u = \int \frac{f(x) \exp(\Phi(x))}{q(x)} dx.$$

Exemple

En utilisant la variation de la constante on va trouver une solution particulière de

$$y' - \frac{2}{x}y = x.$$

La solution générale de l'équation homogène $y' - \frac{2}{x}y = 0$ est donnée par $y_{SGEH}(x) = Cx^2$.

On cherche alors une solution sous la forme

$$y(x) = u(x)x^2,$$

pour une fonction inconnue u . Alors $y'(x) = u'(x)x^2 + 2xu(x)$ et donc:

$$y'(x) - \frac{2}{x}y(x) = u'(x)x^2 + 2xu(x) - \frac{2}{x}u(x)x^2 = u'(x)x^2.$$

Et y est solution de l'équation si et seulement si

$$u'(x)x^2 = x \iff u'(x) = \frac{1}{x} \quad \text{donc par exemple si } u(x) = \ln|x|.$$

Une solution particulière de l'équation est donc donnée par:

$$y(x) = \ln|x|x^2.$$

Contenu de la section

ÉDO linéaires du premier ordre

Définitions

Étape 1 – Résolution de l'équation linéaire homogène associée (ÉLHA)

Étape 2 – Solution particulière: la méthode de la variation de la constante

Étape 3 – Écrire la solution générale de l'équation linéaire

Étape 4 – Déterminer la valeur de la constante d'intégration grâce aux conditions initiales.

Un exemple de résolution d'équation linéaire du premier ordre

Solution générale de l'équation linéaire

D'après les raisonnements précédents, la solution générale de l'équation linéaire (EL) de départ est donnée par:

$$\begin{aligned}y(x) &= y_{SGEH}(x) + y_{SPEL}(x) \\ &= C \exp(-\Phi(x)) + y_{SPEL}(x)\end{aligned}$$

$$\text{où } \Phi(x) = \int \frac{p(x)}{q(x)} dx.$$

Contenu de la section

ÉDO linéaires du premier ordre

Définitions

Étape 1 – Résolution de l'équation linéaire homogène associée (ÉLHA)

Étape 2 – Solution particulière: la méthode de la variation de la constante

Étape 3 – Écrire la solution générale de l'équation linéaire

Étape 4 – Déterminer la valeur de la constante d'intégration grâce aux conditions initiales.

Un exemple de résolution d'équation linéaire du premier ordre

Déterminer la valeur de C

Si des conditions initiales ont été fournies dans l'exercice, il faut maintenant les prendre en compte. La solution générale est:

$$y(x) = C \exp(-\Phi(x)) + y_{SPEL}(x)$$

Pour trouver la solution particulière vérifiant les conditions initiales, il faut **déterminer la valeur de la constante d'intégration C qui correspond à la condition initiale.**

Remarque

En général la solution particulière trouvée à l'étape 2 **n'est pas la solution particulière qui vérifie les conditions initiales.** Cette dernière étape est donc importante !

Contenu de la section

ÉDO linéaires du premier ordre

Définitions

Étape 1 – Résolution de l'équation linéaire homogène associée (ÉLHA)

Étape 2 – Solution particulière: la méthode de la variation de la constante

Étape 3 – Écrire la solution générale de l'équation linéaire

Étape 4 – Déterminer la valeur de la constante d'intégration grâce aux conditions initiales.

Un exemple de résolution d'équation linéaire du premier ordre

Exemple

Considérons le problème de Cauchy suivant :

$$y' + 2xy = 2x, \quad y(0) = 2 \quad (\text{EL})$$

1. **Étape 1:** On résout d'abord l'ÉLHA : $y' + 2xy = 0$. On écrit l'équation sous forme séparée:

$$\frac{y'}{y} + 2x = 0.$$

On intègre alors l'équation:

$$\int \frac{dy}{y} + \int 2x dx = 0 \iff \ln|y| + x^2 = \tilde{C}$$

$$\iff y_{SGEH}(x) = C \exp(-x^2),$$

où la constante C est donnée par $C = \pm e^{\tilde{C}}$.

Exemple (Suite)

2 **Étape 2:** On cherche une solution particulière de l'équation:

$$y' + 2xy = 2x. \quad (\text{EL})$$

Par la méthode de la variation de la constante on cherche y sous la forme

$$y(x) = u(x) \exp(-x^2)$$

pour une fonction inconnue u . Alors:

$$y'(x) = u'(x) \exp(-x^2) - 2xu(x) \exp(-x^2)$$

En remplaçant dans l'équation $y' + 2xy = 2x$, nous obtenons :

$$u'(x) \exp(-x^2) - 2xu(x) \exp(-x^2) + 2xu(x) \exp(-x^2) = 2x,$$

d'où

$$u'(x) = 2x \exp(x^2)$$

et donc $u(x) = \exp(x^2)$. Une solution particulière de notre ÉDO est donc donnée par:

$$y(x) = \exp(x^2) \exp(-x^2) = 1.$$

Exemple (Suite)

3 **Étape 3:** La solution générale de l'équation

$$y' + 2xy = 2x \quad (\text{EL})$$

est donc:

$$y(x) = 1 + C \exp(-x^2),$$

pour $C \in \mathbb{R}$.

4 **Étape 4:** On veut trouver une solution particulière au problème de Cauchy, c'est-à-dire qu'on veut trouver l'unique solution vérifiant $y(0) = 2$. L'expression ci-dessus évaluée en 0 donne:

$$y(0) = 1 + C = 2,$$

et donc $C = 1$. La solution finale du problème de Cauchy est donc:

$$y(x) = 1 + \exp(-x^2).$$

Contenu de la section

Équations linéaires du second ordre à coefficients constants

Équations linéaires du second ordre à coefficients constants

Définition

Une *équation linéaire du second ordre à coefficients constants* est une équation de la forme :

$$ay'' + by' + cy = f(x)$$

pour certaines *constantes* $a, b, c \in \mathbb{R}$ et pour une fonction donnée f .

Exemple

- ▶ $y'' + 2y' + y = 0$ (linéaire, *homogène*, à coefficients constants)
- ▶ $y'' + 2y' + y = x^2$ (linéaire, non-homogène, à coefficients constants)

Méthode de résolution générale

La résolution d'une telle équation se fait en quatre étapes comme dans le cas des équations linéaires du premier ordre:

1. Résolution de l'équation linéaire homogène associée:

$$ay'' + by' + cy = 0.$$

2. Trouver **une** solution particulière de l'équation linéaire générale (avec f .)
3. Écrire la solution générale de l'équation linéaire comme la somme de la solution particulière de l'équation linéaire et de la solution générale de l'équation homogène
4. (si requise): Déterminer une solution exacte grâce aux conditions initiales d'un problème de Cauchy

Dans le cas des équations du **second ordre** les étapes 1 et 2 **sont plus compliquées**.

Contenu de la section

Équations linéaires du second ordre à coefficients constants

Étape 1 pour les équations du second ordre: Résolution de l'équation homogène associée

Polynôme caractéristique

On commence par résoudre l'équation linéaire homogène associée (ÉLHA) :

$$ay'' + by' + cy = 0.$$

Dans le cas des équations du premier ordre cela revenait à résoudre une équation à variables séparables. Dans le cas présent, **la méthode de séparation des variables ne s'applique pas.**

À une telle équation on associe son **polynôme caractéristique** :

$$\lambda \mapsto a\lambda^2 + b\lambda + c.$$

Selon le nombre de racines réelles de ce polynôme, c'est-à-dire **en fonction du discriminant de ce polynôme**, la solution générale prendra une forme différente.

Solutions de l'équation linéaire homogène associée

Théorème

Soit $ay'' + by' + cy = 0$ l'ÉLHA et $a\lambda^2 + b\lambda + c$ son polynôme caractéristique. Alors:

Cas 1 Si $b^2 - 4ac > 0$, on note $\lambda_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ et $\lambda_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ les deux racines du polynôme caractéristique. La solution générale de l'équation homogène (SGEH) est alors :

$$y_{SGEH}(x) = C_1 \exp(\lambda_1 x) + C_2 \exp(\lambda_2 x)$$

où C_1 et C_2 sont des constantes

Cas 2 Si $b^2 - 4ac = 0$, on note $\lambda = \frac{-b}{2a}$ l'unique racine du polynôme caractéristique. La solution générale de l'équation homogène (SGEH) est alors :

$$y_{SGEH}(x) = (C_1 + C_2 x) \exp(\lambda x)$$

où C_1 et C_2 sont des constantes

Théorème (continué)

Cas 3 Si $b^2 - 4ac < 0$, on note $\rho = \frac{-b}{2a}$ et $\omega = \frac{1}{2a} \sqrt{4ac - b^2}$. La solution générale de l'équation homogène (SGEH) est alors :

$$y_{SGEH}(x) = \left(C_1 \cos(\omega x) + C_2 \sin(\omega x) \right) \exp(\rho x)$$

où C_1 et C_2 sont des constantes

Remarque: le cas 3 correspond au cas où le polynôme caractéristique n'a pas de racine réelle mais a deux racines complexes, données par:

$$\lambda_1 = \rho + i\omega \quad \text{et} \quad \lambda_2 = \rho - i\omega.$$

C'est donc le signe du discriminant du polynôme caractéristique:

$$a\lambda^2 + b\lambda + c$$

qui définit la famille de solutions de l'équation homogène.

Une remarque

Nous ne démontrons pas ce théorème, mais vous pouvez vérifier que les expressions données définissent bien des solutions.

Remarque

Il est important de remarquer que dans le théorème ci-dessus, la solution y_{SGEH} est toujours de la forme :

$$y_{SGEH}(x) = C_1 g_1(x) + C_2 g_2(x)$$

où g_1 et g_2 sont données par le théorème et dépendent du cas dans lequel on se trouve et C_1 et C_2 sont les constantes d'intégration.

Par exemple dans le Cas 1, où le polynôme caractéristique a **deux racines distinctes** λ_1 et λ_2 , on a:

$$g_1(x) = \exp(\lambda_1 x), \quad g_2(x) = \exp(\lambda_2 x).$$