

Géométrie Analytique dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$: systèmes de coordonnées et équations dans le plan

(Syllabus Chapitre V et Chapitre VII jusqu'à la partie 3.)

Contenu de la section

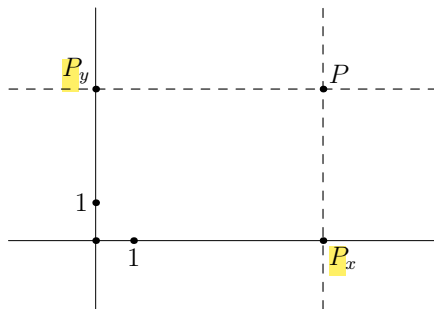
Géométrie analytique

Géométrie analytique

La **géométrie analytique** est une manière d'aborder des problèmes de géométrie **en faisant des calculs**. On utilise pour ça un ou plusieurs systèmes de coordonnées.

On donne quelques exemples dans le plan:

Coordonnées cartésiennes dans le plan



Définition

Un repère cartésien est la donnée de deux axes sécants, et d'une unité sur chaque axe. L'intersection des axes est appelée l'origine. Les coordonnées cartésiennes d'un point P du plan sont alors obtenues en projetant ce point sur chacun des axes, et en repérant la projection par rapport à l'unité.

Un système de coordonnées donne une équivalence entre

- ▶ les points du plan et
- ▶ les couples de nombres réels de la forme (x,y) , où x et y décrivent tous les nombres réels. Nous noterons $\mathbb{R}^2$ l'ensemble des points de la forme (x,y) lorsque x et y décrivent $\mathbb{R}$. Nous allons donc repérer les points du plan par leurs coordonnées (x,y) où x est l'abscisse et y l'ordonnée.

Dans l'espace, on représente des points par trois coordonnées: (x, y, z) , respectivement abscisse et coordonnée dans le plan horizontal et hauteur. On notera de même $\mathbb{R}^3$ l'ensemble des points de la forme (x, y, z) lorsque x, y et z décrivent $\mathbb{R}$: c'est l'ensemble des points de l'espace.

Contenu de la section

Géométrie analytique

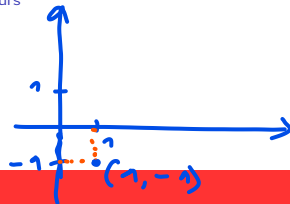
Points et vecteurs

Opérations de base

Norme d'un vecteur

Systèmes de coordonnées

Points de $\mathbb{R}^n$



Définition

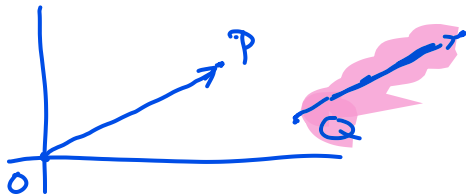
Un élément de $\mathbb{R}^n$, $n = 2$ ou 3 , peut être vu comme un *point*, et il s'écrit alors comme ses *coordonnées*, qui sont n nombres. Nous les notons généralement $(p_1, p_2, \dots, p_n)$.

Lorsque $n = 2$: les coordonnées sont appelées *l'abscisse et l'ordonnée* (souvent notées x et y)

Exemple

Le point $(1, -1)$ de $\mathbb{R}^2$ désigne l'élément du plan dont l'abscisse vaut 1 et l'ordonnée vaut -1 .

Vecteurs de $\mathbb{R}^n$



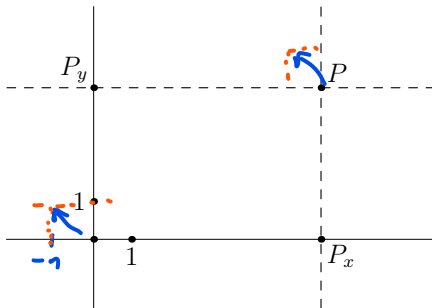
On peut aussi voir un élément de $\mathbb{R}^n$ comme un déplacement dans la direction indiquée (une translation) ou encore comme une flèche entre deux points. C'est ce qu'on appelle un vecteur:

Définition

Un vecteur est un élément de $\mathbb{R}^n$, $n = 2, 3, \dots$, dont les coordonnées sont maintenant appelées les *composantes* du vecteur.

Exemple

Le vecteur $(-1, 1)$ de $\mathbb{R}^2$ indique une translation dans la direction “Nord-Ouest” sur le plan.



Différence entre point et vecteur

La différence, fondamentale et intuitive entre point et vecteur est:

- ▶ que le point représente **un état, une position**
- ▶ tandis que le vecteur représente **un déplacement**, dans une direction donnée, entre deux points.

Remarque

Mais les deux sont représentés par des éléments de $\mathbb{R}^n$! Par exemple si $n = 2$: pour un point, (x, y) représente sa position dans le plan. Alors que pour un vecteur, (x, y) représente un décalage de x unités sur l'axe horizontal et de y sur l'axe vertical.

Composantes d'un vecteur

Un vecteur se représentera sous la forme d'une flèche. Il est donné sans point de départ: c'est une direction.

Si x et y sont deux points de $\mathbb{R}^n$, on peut en revanche calculer le vecteur qui représente le déplacement de x à y . Ce vecteur se note généralement $\overrightarrow{xy}$.

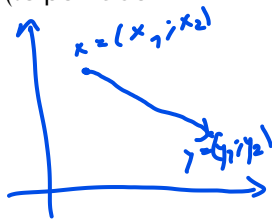
Ses composantes sont données en prenant la différence entre les coordonnées de y (le point d'arrivée) et celles de x (le point de

départ). Par exemple, dans $\mathbb{R}^3$: $\overrightarrow{xy} = \begin{pmatrix} y_1 - x_1 \\ y_2 - x_2 \\ y_3 - x_3 \end{pmatrix}$

⚠ au sens

$$\overrightarrow{xy} \neq \overrightarrow{yx} \\ = -\overrightarrow{yx}$$

coord de y .



Contenu de la section

Géométrie analytique

Points et vecteurs

Opérations de base

Norme d'un vecteur

Systèmes de coordonnées

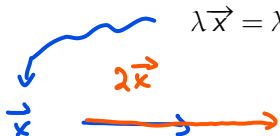
Opérations sur les vecteurs

Si $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$ et $\vec{y} = (y_1, \dots, y_n)$ sont des vecteurs de $\mathbb{R}^n$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on peut sommer deux vecteurs et multiplier un vecteur par un réel.

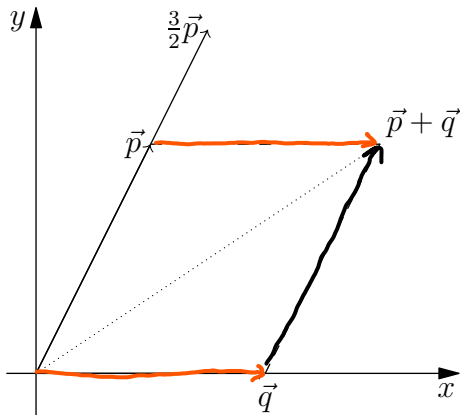
Tout se fait **coordonnée par coordonnée**:

$$\vec{x} + \vec{y} = (x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$$

$$\vec{x} - \vec{y} = (x_1, \dots, x_n) - (y_1, \dots, y_n) = (x_1 - y_1, \dots, x_n - y_n)$$

$$\lambda \vec{x} = \lambda(x_1, \dots, x_n) = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n)$$


- ▶ la somme de deux vecteurs est donnée par la règle du parallélogramme ;
- ▶ la multiplication par un réel multiplie la longueur.

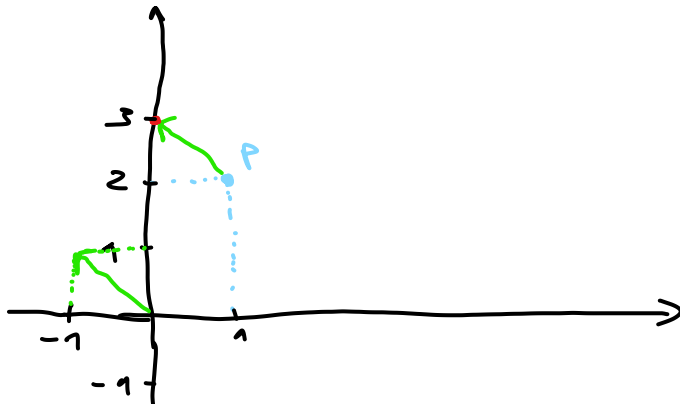


Combiner points et vecteurs

résume le passage au composante du vecteur $\vec{qP}$

- ▶ la différence de deux **points** est un vecteur allant du second vers le premier : $p - q$ est le vecteur $\vec{qp}$; $q + \vec{qp} = p$
- ▶ la somme d'un **point** et d'un **vecteur** représente le **point obtenu** en se **déplaçant dans la direction du vecteur à partir de ce point** : le résultat est **un point** ;
- ▶ la somme de deux ou plusieurs **vecteurs** représente la composée de déplacements successifs : le résultat est **un vecteur**.

Tout ceci se calcule en coordonnées.



Exemple

Si on considère $\mathbf{p} = (1, 2)$ comme un point, et $\vec{w} = (-1, 1)$ comme un vecteur (donnant la direction “Nord-Ouest”), alors leur somme $\mathbf{p} + \vec{w} = (1, 2) + (-1, 1) = (0, 3)$ comme le point obtenu en translatant le point de départ, $\mathbf{p}$, dans la direction donnée $\vec{w}$.

Vecteur nul

Définition

Dans $\mathbb{R}^n$, l'élément particulier $(0,0,\dots,0)$ se note $\vec{0}$ et est appelé *vecteur nul*.

Il représente un déplacement ... nul (donc aucun déplacement).

Résultat

Quel que soit le vecteur $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$, nous avons

$$\vec{v} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{v} = \vec{v}.$$

Décomposition selon les axes de coordonnées

$$\vec{e}_2 = (0, 1)$$



Regardons le cas $n = 3$. Nous notons $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ les vecteurs suivants :

$$\vec{e}_1 = (1, 0, 0)$$

$$\vec{e}_2 = (0, 1, 0)$$

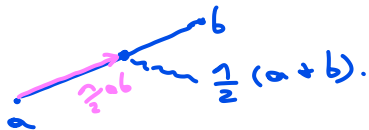
$$\vec{e}_3 = (0, 0, 1)$$

Soit $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ un vecteur de $\mathbb{R}^3$. Alors $\vec{v}$ peut s'écrire:

$$\vec{v} = v_1 (1, 0, 0) + v_2 (0, 1, 0) + v_3 (0, 0, 1) = v_1 \vec{e}_1 + v_2 \vec{e}_2 + v_3 \vec{e}_3$$

Attention, ici $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ et $\vec{e}_3$ sont eux-mêmes des vecteurs. Alors que v_1, v_2 et v_3 sont des **nombre**s (encore appelés des "**scalaires**"). Il ne faut pas confondre les deux.

Centre de gravité



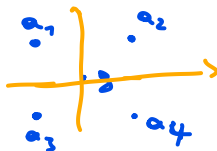
Le milieu d'un segment d'un point **a** jusqu'à un **b** est donné par :

$$a + \frac{1}{2} \overrightarrow{ab} = \frac{1}{2}(a + b)$$

Le milieu ou *centre de gravité* des points $a_1, \dots, a_k$ est donné par:

$$g = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k a_i.$$

Chaque coordonnée du centre de gravité **g** est la moyenne des coordonnées des a_i .



Contenu de la section

Géométrie analytique

Points et vecteurs

Opérations de base

Norme d'un vecteur

Systèmes de coordonnées

Résultat (Rappel – Théorème de Pythagore)

Dans le plan, la longueur du segment de $a = (a_1, a_2)$ à $b = (b_1, b_2)$ est donnée par $\sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}$.

$$(\text{longueur})^2 + (\text{longueur})^2 = (\text{longueur})^2$$



Définition

En général, on appelle *norme d'un vecteur* $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ la quantité:

$$\|\vec{v}\| := \sqrt{\sum_{i=1}^n v_i^2} = \sqrt{v_1^2 + \dots + v_n^2}.$$

$$\vec{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$$

Exemple

La norme du vecteur $(4, 2, 4)$ est $\sqrt{4^2 + 2^2 + 4^2} = \sqrt{36} = 6$.

Remarque

Si a et b sont deux points de $\mathbb{R}^n$, la norme du vecteur $\overrightarrow{ab}$ mesure la distance entre a et b .

Résultat

La norme $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ vérifie les propriétés suivantes :

► $\|\vec{a}\| = 0 \iff \vec{a} = \vec{0}$;

► $\|\lambda \vec{a}\| = |\lambda| \|\vec{a}\|$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$;

► $\|\vec{a} + \vec{b}\| \leq \|\vec{a}\| + \|\vec{b}\|$ (inégalité triangulaire).

$$\|-\vec{a}\| = |-1| \|\vec{a}\| = \|\vec{a}\|.$$

La preuve est omise et on renvoie au syllabus.

$$\sqrt{2} \leq 1 + 1.$$

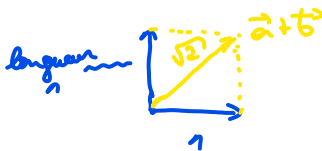
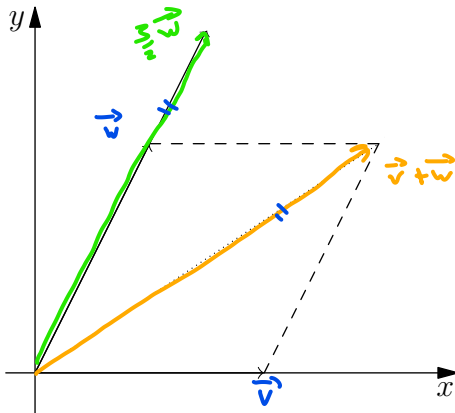


Illustration de l'inégalité triangulaire

L'inégalité triangulaire dit que, pour deux vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$, on a

$$\|\vec{v} + \vec{w}\| \leq \|\vec{v}\| + \|\vec{w}\|.$$

Ca se voit géométriquement:



Contenu de la section

Géométrie analytique

Points et vecteurs

Opérations de base

Norme d'un vecteur

Systèmes de coordonnées

On connaît le système de **coordonnées cartésiennes** du plan, c'est la fonction

$$\begin{cases} \text{plan} \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ \mathbf{p} \mapsto (x(\mathbf{p}), y(\mathbf{p})) \end{cases}$$

qui à tout point associe son abscisse et

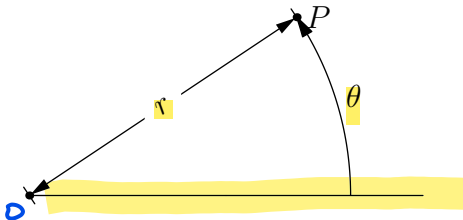
D'autres systèmes de coordonnées existent. Toute fonction qui permet de représenter **de manière unique** des points du plan par un couple de nombres réels peut servir de système de coordonnées. Même chose pour $\mathbb{R}^3$ avec trois (triplet) nombres réels.

Nous allons décrire en détail un autre système de coordonnées dans le plan, appelées **coordonnées polaires**.

Coordonnées polaires.

Pour définir des *coordonnées polaires* du plan, on choisit

- ▶ une origine o (un point) et
- ▶ une demi-droite issue de ce point.



Un point P est alors repéré dans le plan par deux coordonnées, souvent notées (r, θ) , où

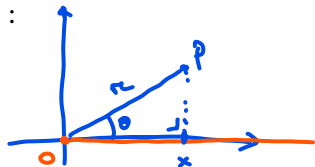
- ▶ r correspond à la distance entre o et P , et
- ▶ θ correspond à l'angle orienté entre la demi-droite choisie et la demi-droite issue de o passant par P .

On choisit généralement $\theta \in [0; 2\pi[$.

coord du pt o
 $o : (o, ?)$

Si P possède des coordonnées cartésiennes (x, y) et des coordonnées polaires (r, θ) , elles sont reliées par les relations :

$$\begin{cases} x = r \cos(\theta), \\ y = r \sin(\theta). \end{cases}$$



Remarque

Il n'est pas possible d'écrire aisément θ en terme de x et y , par contre par le **théorème de Pythagore** on obtient $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, ce qui permet d'écrire

$$\begin{cases} \cos(\theta) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \\ \sin(\theta) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \end{cases}$$

Contenu de la section

équations dans le plan

Contenu de la section

équations dans le plan

Droites

équations de cercles

équations d'objets

Rappel: chaque point du plan a deux coordonnées cartésiennes. On va voir qu'on peut dessiner des ensembles de points dans le plan dont les coordonnées vérifient une équation de deux variables.

équation d'une droite

Dans $\mathbb{R}^2$, toute droite admet une équation de la forme

$$ax + by + c = 0$$

c'est-à-dire que les points (x, y) vérifiant l'équation ci-dessus sont exactement les points de la droite. Les constantes $a, b, c \in \mathbb{R}$ permettent de décrire la droite (position, direction).

Ceci est une équation à deux inconnues, elle admet donc en général un nombre infini de solutions! Voici pourquoi l'ensemble des solutions est une droite et pas simplement un point.

Justification

Soit $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^2$ (un point) et $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$ (un vecteur). La droite de $\mathbb{R}^2$ passant par $\mathbf{p}$ et dirigée selon la direction $\vec{v}$ est l'ensemble des points $\mathbf{x}$ de la forme

vecteur directeur.

$$\mathbf{x} = \mathbf{p} + t\vec{v} \quad t \in \mathbb{R}.$$

C'est ce qu'on appelle les équations paramétriques de la droite.

On écrit $\mathbf{x} = (x, y)$, $\mathbf{p} = (p_1, p_2)$, $\vec{v} = (v_1, v_2)$. Sur chaque coordonnée on obtient donc:

$$x = p_1 + tv_1 \quad \text{et} \quad y = p_2 + tv_2.$$

donc

$$x - p_1 = tv_1 \quad \text{et} \quad y - p_2 = tv_2.$$

On a alors

$$\begin{matrix} \cdot v_2 & \downarrow & \cdot v_2 & \cdot v_2 & \cdot v_2 \\ \cdot v_2 & \downarrow & \cdot v_2 & \cdot v_2 & \cdot v_2 \end{matrix}$$

$$(x - p_1)v_2 (= tv_1 v_2) = (y - p_2)v_1 \rightarrow (x - p_1)v_2 - (y - p_2)v_1 = 0$$

c'est-à-dire, en changeant de notations

$$ax + by + c = 0$$

(on a posé: $a = v_2$, $b = -v_1$ et $c = p_2 v_1 - p_1 v_2$).



Remarquons que la droite d'équation $ax + by + c = 0$

- ▶ est verticale si $b = 0$, $a \neq 0$: son équation est alors $x = -\frac{c}{a}$.
- ▶ est horizontale si $a = 0$, $b \neq 0$: son équation est alors $y = -\frac{c}{b}$.
- ▶ passe par l'origine si $c = 0$. Car si $c = 0$, $(0,0)$ vérifie toujours l'équation.
- ▶ est identique à la droite d'équation $kax + kby + kc = 0$ pour n'importe quelle constante $k \neq 0$.

Lorsque $b \neq 0$ (droite non-verticale), on peut ré-écrire l'équation en isolant y :

$$y = mx + p$$

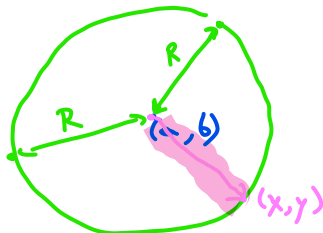
Contenu de la section

équations dans le plan

Droites

équations de cercles

équations de cercles



Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, et $R > 0$.

Le cercle de centre (a, b) et de rayon R est l'ensemble des points à distance R du point (a, b) . Il a donc pour équation :

$$\| (x, y) - (a, b) \| = R$$

vecteur .

c'est-à-dire

$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = R$$

ou encore

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2.$$

↪ eq du cercle

Exemple

L'équation:

$$x^2 - 6x + y^2 - 2y + 9 = 0$$

représente un cercle de centre $(3, 1)$ et de rayon 1 .

Pour voir ça, on réécrit:

$$x^2 - 6x + y^2 - 2y + 9 = 0 \iff (x - 3)^2 + (y - 1)^2 - 1 = 0$$

qui est équivalente à :

$$(x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 1$$

équation d'un cercle en coordonnées polaires

Le choix d'un autre système de coordonnées peut parfois considérablement simplifier les équations des objets étudiés.

Exemple

On considère l'équation d'un cercle de centre 0 et de rayon R .

- ▶ En coordonnées cartésiennes: $x^2 + y^2 = R^2$
- ▶ En coordonnées polaires: $r = R$ (pas de contrainte sur θ)
d'équation
 $\sqrt{x^2 + y^2}$

