

Fonctions réciproques

(Syllabus Chapitre IV, partie 3, et Chapitre IX partie 3.3)

Rappels

Définition

Une *fonction* f c'est :

- ▶ un *ensemble de départ* A ,
- ▶ un *ensemble d'arrivée* B et
- ▶ une règle qui associe à chaque élément x de A un unique élément de B , noté $f(x)$.

Une fonction est donc une manière d'associer à tout élément x de A un élément $f(x)$ de B .

- ▶ $f(x)$ est l'*image* de x par f .
- ▶ On dit aussi que x est un *antécédent* de $f(x)$.

La notation pour une fonction f de A dans B est

$$f : \begin{cases} A \rightarrow B \\ x \mapsto f(x) \end{cases} \text{ ou encore } f : A \rightarrow B : \quad x \mapsto f(x).$$

Contenu de la section

Fonctions réciproques

Contenu de la section

Fonctions réciproques

Définitions

Fonctions réciproques

Logarithme et exponentielle

Fonctions trigonométriques réciproques

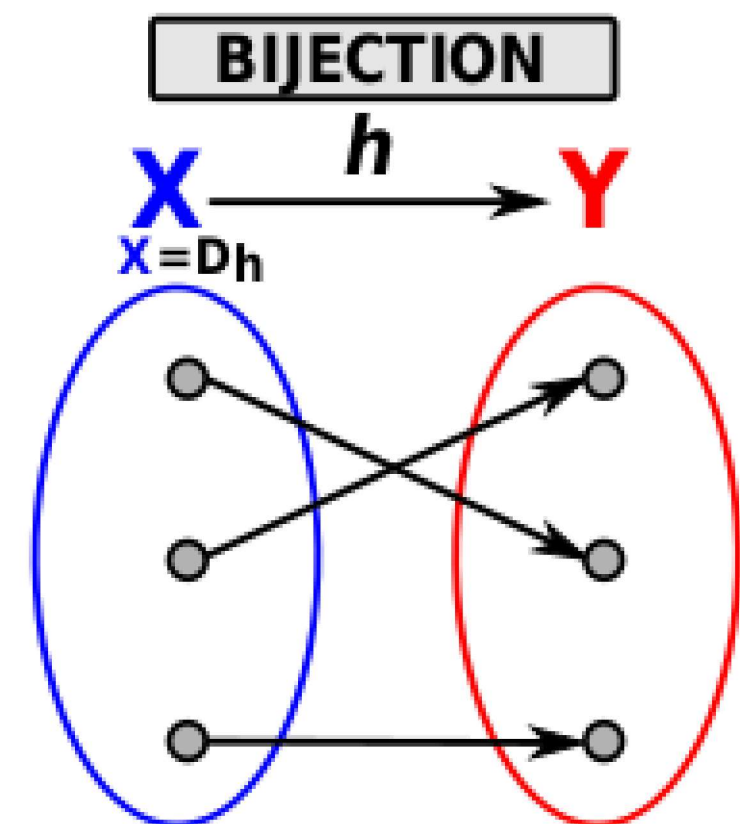
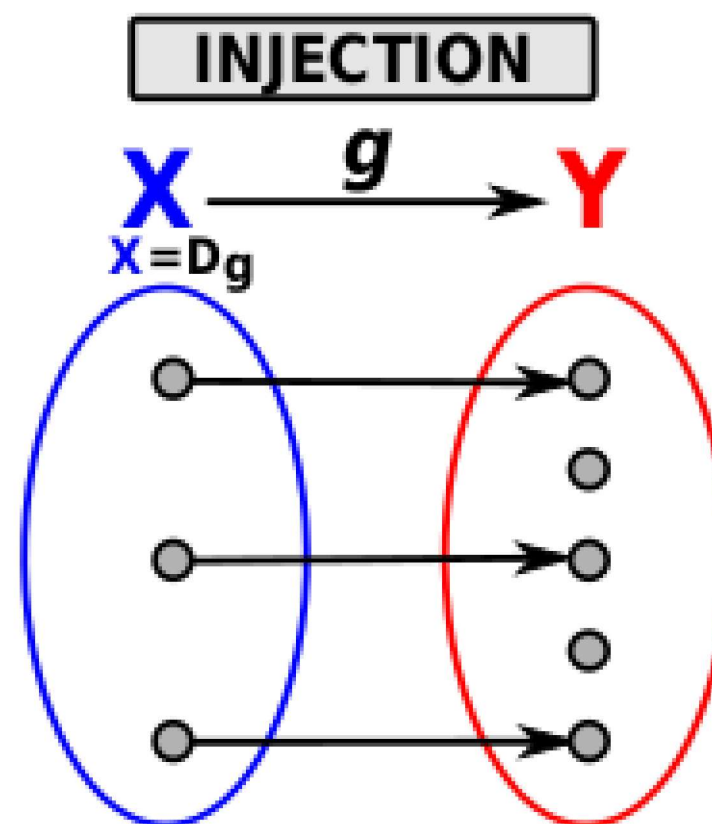
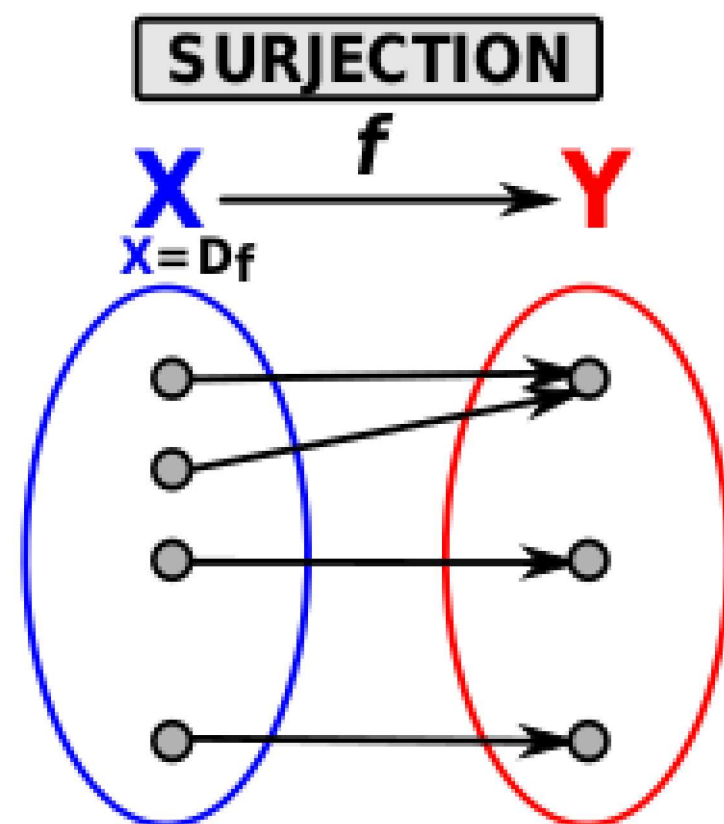
Continuité des fonctions réciproques

Injectivité, Surjectivité, Bijectivité

Définition

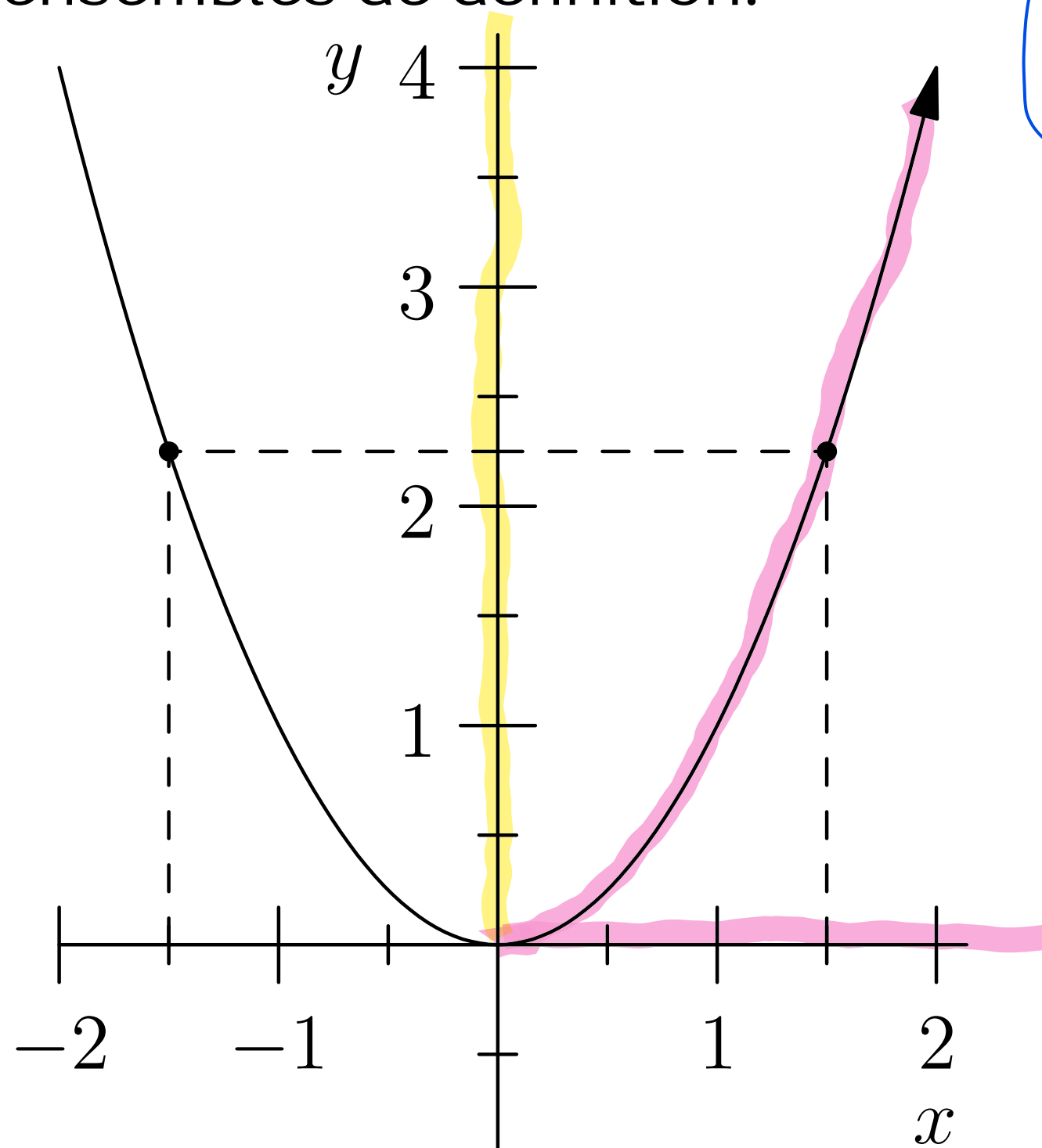
Soit $f : X \rightarrow Y$ une fonction.

- ▶ f est dite *surjective* si tout élément de Y est l'image d'au moins un élément de X ;
- ▶ f est dite *injective* si deux éléments distincts de X ont des images distinctes dans Y ;
- ▶ f est dite *bijective* si f est à la fois injective et surjective.



Exemples avec des fonctions réelles

La fonction $f : x \mapsto x^2$ change de nature quand on change ses ensembles de définition:



- ▶ Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ elle est **surjective** mais **non injective**: car tout réel $y \geq 0$ s'écrit comme $y = x^2$ avec $x = \sqrt{y}$. Mais $f(-x) = f(x)$.
- ▶ Si $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ alors f est **surjective et injective**, donc **bijective**. Car si $y \in \mathbb{R}_+$, il existe un unique réel $x \geq 0$ tel que $x^2 = y$: c'est précisément $\sqrt{y}$.
- ▶ Enfin si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, elle n'est **rien du tout**: car les réels négatifs ne sont pas dans l'image de f et $f(-x) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

4 a deux antécédents 2 et -2 (par ex).

Pour reformuler

Pour reformuler: une fonction $f : A \rightarrow B$ est

- ▶ surjective si tout élément de B est l'image **d'au moins** un élément de A
- ▶ injective si tout élément de B est l'image **d'au plus** un élément de A
- ▶ bijective si tout élément de B est l'image **d'un unique** élément de A .

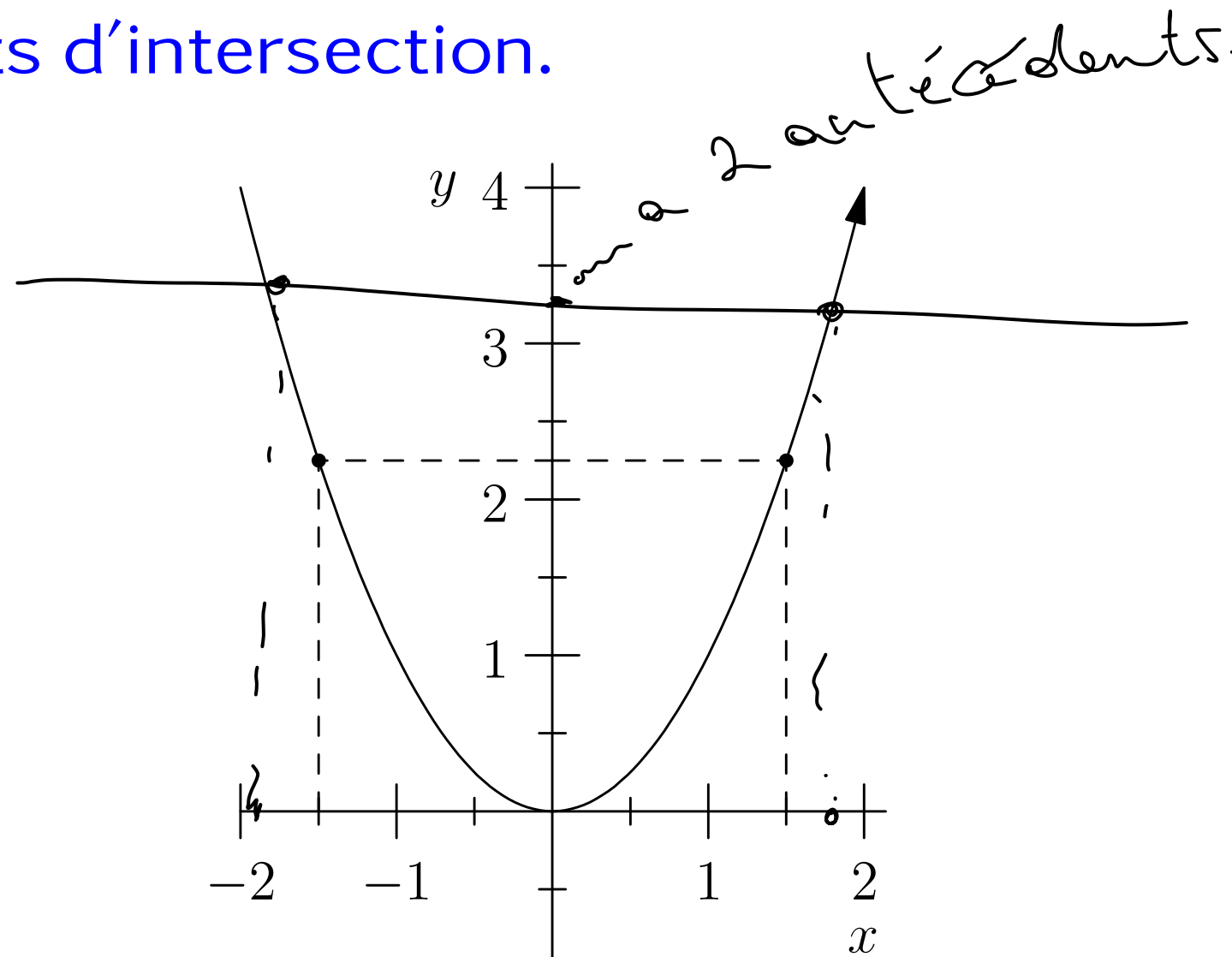
Attention, une fonction peut très bien n'être ni surjective ni injective (voir le transparent précédent).

→ $\forall x_1, x_2 \in \text{dom } f : x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2) \quad (\text{déf}).$
 ou bien "par l'absurde"
 $f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2$

Injectivité, surjectivité et graphe

Remarque

On peut “voir” les antécédents d’un nombre y sur le graphe de f en traçant une droite horizontale à hauteur y : les antécédents sont **les abscisses des points d’intersection**.



Ensemble image

Définition

Soit $f : A \rightarrow B$ une fonction. L'ensemble image de f , noté $\text{Im } f$ ou $f(A)$, est l'ensemble des valeurs prises par la fonction. C'est

$$\text{Im } f = \left\{ \underbrace{f(x)}_B \text{ tel que } x \in A \right\}. \quad \underbrace{\subseteq}_B \quad \underbrace{B}_{\text{est inclus } \mathcal{L}}$$

Attention, l'ensemble image est un **ensemble**. Pour une fonction à valeurs réelles, par exemple, c'est une partie de $\mathbb{R}$.

Ensemble image

Exemples:

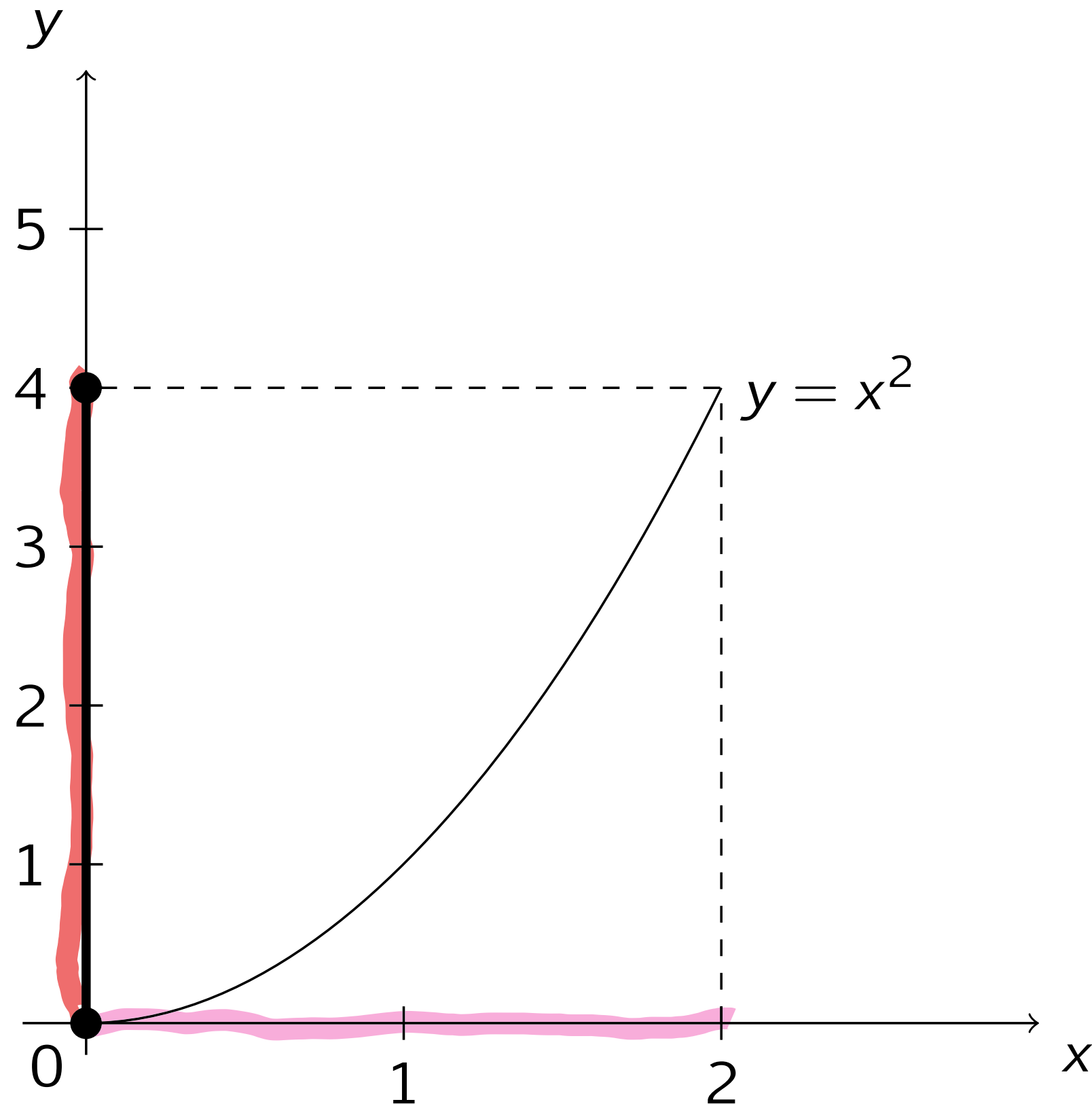
L'ensemble image de la fonction...

- ▶ $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x^2$ est $\mathbb{R}^+$
- ▶ $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x^3$ est $\mathbb{R}$
- ▶ $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x^2 + 1$ est $[1, +\infty[$.
- ▶ $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \sin x$ est $[-1, 1]$.

Justification:

$\forall y \in \mathbb{R}^+ : y = f(\sqrt{y})$
et $\forall y \in \mathbb{R}_0^- : y \neq x^2$
quel que soit x

Le graphe de $[0, 2] \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x^2$ et son ensemble image



Contenu de la section

Fonctions réciproques

Définitions

Fonctions réciproques

Logarithme et exponentielle

Fonctions trigonométriques réciproques

Continuité des fonctions réciproques

Réciproque

Définition

Une fonction $f: A \rightarrow B$ est dite *inversible* si il existe une fonction $g: B \rightarrow A$ telle que

$$g(f(x)) = x \quad \forall x \in A \quad \text{et} \quad f(g(y)) = y \quad \forall y \in B.$$

La fonction g est appelée l'*inverse* ou la *fonction réciproque* de f , et se note f^{-1} .

Ecrire que $g(f(x)) = x$ (ou $f(g(y)) = y$) revient à dire que si on applique f à x puis qu'on applique g à la valeur $f(x)$ on retombe sur x : il ne s'est rien passé.

Faites attention aux ensembles où vivent les variables: si on calcule $g(f(x))$ alors $x \in A$, mais si on calcule $f(g(y))$ alors $y \in B$.

→  $f^{-1}(x) \neq \frac{1}{f(x)} = (f(x))^{-1}$

Inversible = bijective



Résultat

1. Une fonction est inversible si et seulement si c'est une bijection.
2. Si g est la réciproque de f , alors f est la réciproque de g . En d'autres termes,

$$(f^{-1})^{-1} = f.$$

Preuve

- 1) Soit $f: A \rightarrow B$ une fonction inversible d'inverse g . Alors f est
- ▶ injective car $f(x) = f(y)$ implique $x = g(f(x)) = g(f(y)) = y$.
 - ▶ surjective car si $z \in B$, alors $\underbrace{g(z)}_A$ est un antécédent de z . Car $f(g(z)) = z$.

car $f(x) = f(y)$.

Donc f est bijective. Réciproquement, si f est bijective, alors pour tout $z \in B$ il existe un (surjectivité) unique (injectivité) antécédent par f , et on appelle cet antécédent $g(z)$.

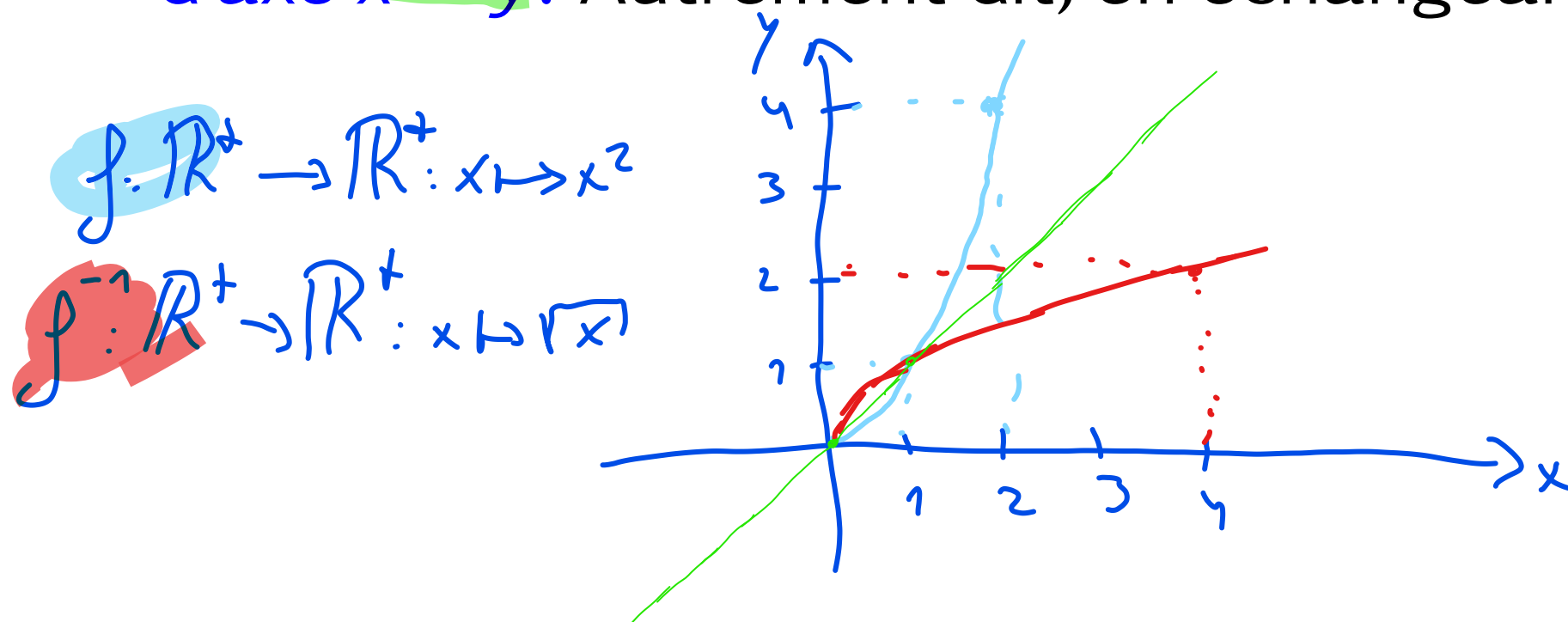
Graphe de la réciproque

Le résultat précédent (bijective = inversible = $\exists$ réciproque) montre qu'une fonction $f : A \rightarrow B$ est inversible si et seulement si pour tout $y \in B$, il existe un et un seul $x \in A$ tel que $y = f(x)$.

C'est cette valeur de x qui est notée $f^{-1}(y)$. Ou encore:

$$\text{lorsque } f \text{ est inversible, } y = f(x) \iff x = f^{-1}(y).$$

Si $f : A \rightarrow B$ est bijective, alors le graphe de sa réciproque $f^{-1} : B \rightarrow A$ peut s'obtenir en prenant l'image du graphe de f par une symétrie d'axe $x = y$. Autrement dit, en échangeant les valeurs de x et y .



Une mise en garde

Attention à ne pas confondre $f^{-1}(x)$ (la fonction réciproque appliquée en x) avec $(f(x))^{-1} := 1/f(x)$ qui est l'inverse de $f(x)$!

Dans le premier cas il s'agit d'une fonction qu'on applique à un point, dans le deuxième c'est l'inverse d'un nombre réel (l'image).

Une mise en garde

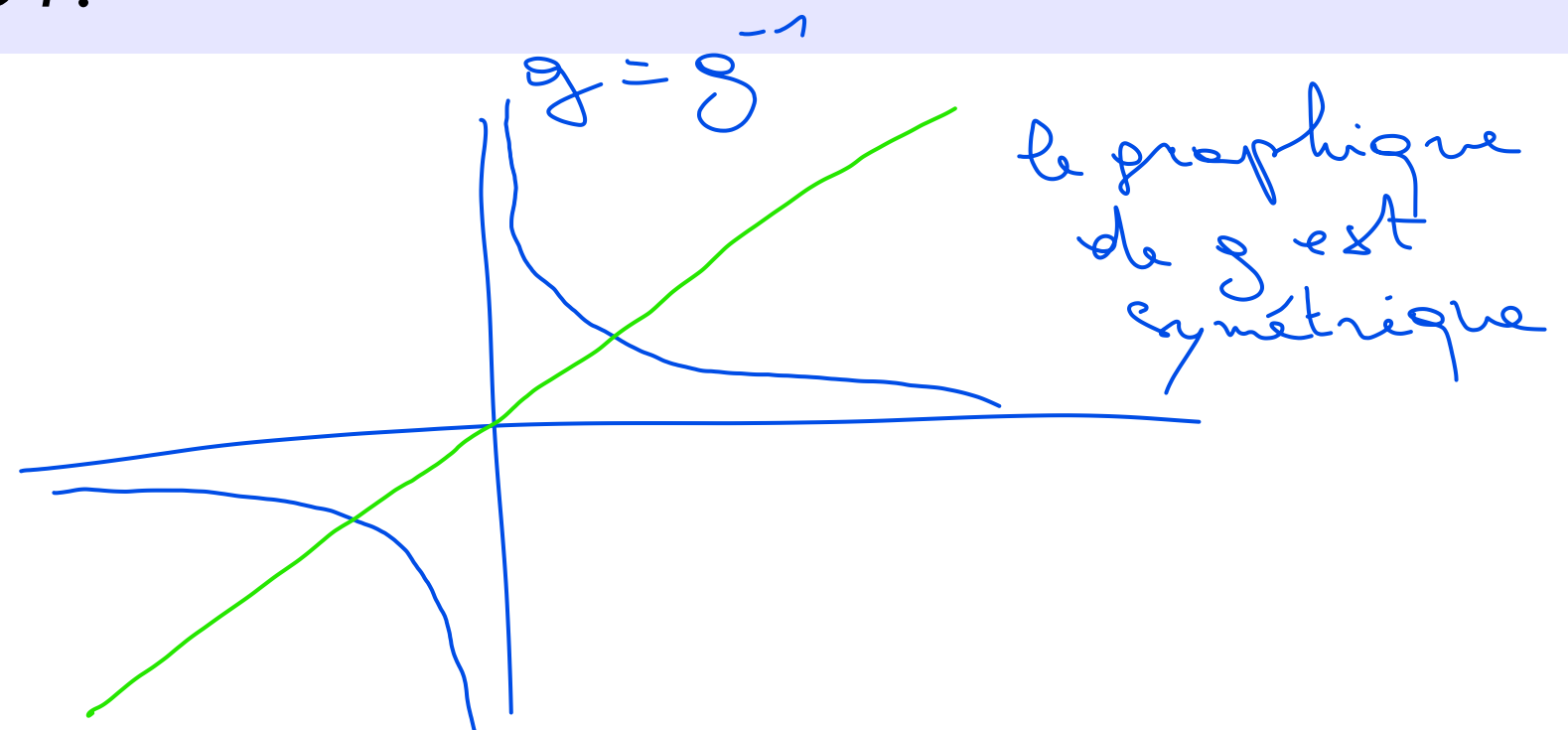
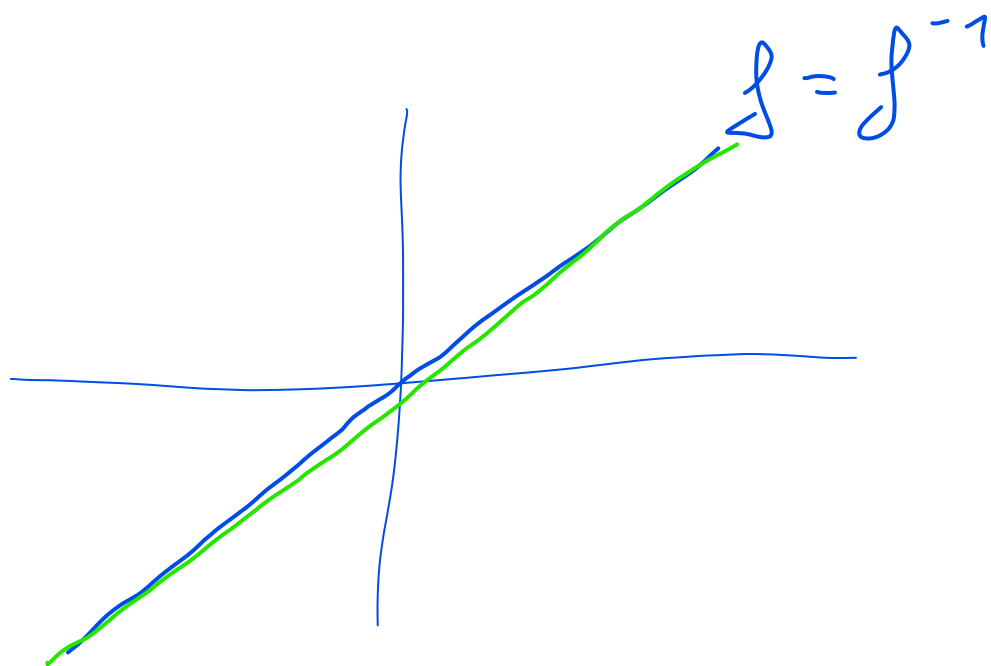
Exemple

On note $\mathbb{R}_0 = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Par exemple, les fonctions

$$f : \mathbb{R}_0 \rightarrow \mathbb{R}_0 : x \mapsto x \quad \text{et} \quad g : \mathbb{R}_0 \rightarrow \mathbb{R}_0 : x \mapsto \frac{1}{x}$$

vérifient $(f(x))^{-1} = \frac{1}{f(x)} = g(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_0$.

Par contre vous pouvez vérifier que $f^{-1} = f$ et $g^{-1} = g$. La fonction g n'est donc pas la réciproque de f !



Contenu de la section

Fonctions réciproques

Définitions

Fonctions réciproques

Logarithme et exponentielle

Fonctions trigonométriques réciproques

Continuité des fonctions réciproques

Exemple: logarithme et exponentielle

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_0^+ : x \mapsto e^x$$

Rappel: si $x \in \mathbb{R}$ on peut toujours considérer e^x qui est un nombre réel strictement positif.

Si $y > 0$, $\ln y$ (logarithme népérien) désigne l'unique nombre réel tel que $\ln y \in \mathbb{R}_0^+$

$$e^{\ln(y)} = y. \quad \text{et} \quad \ln(e^x) = x \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

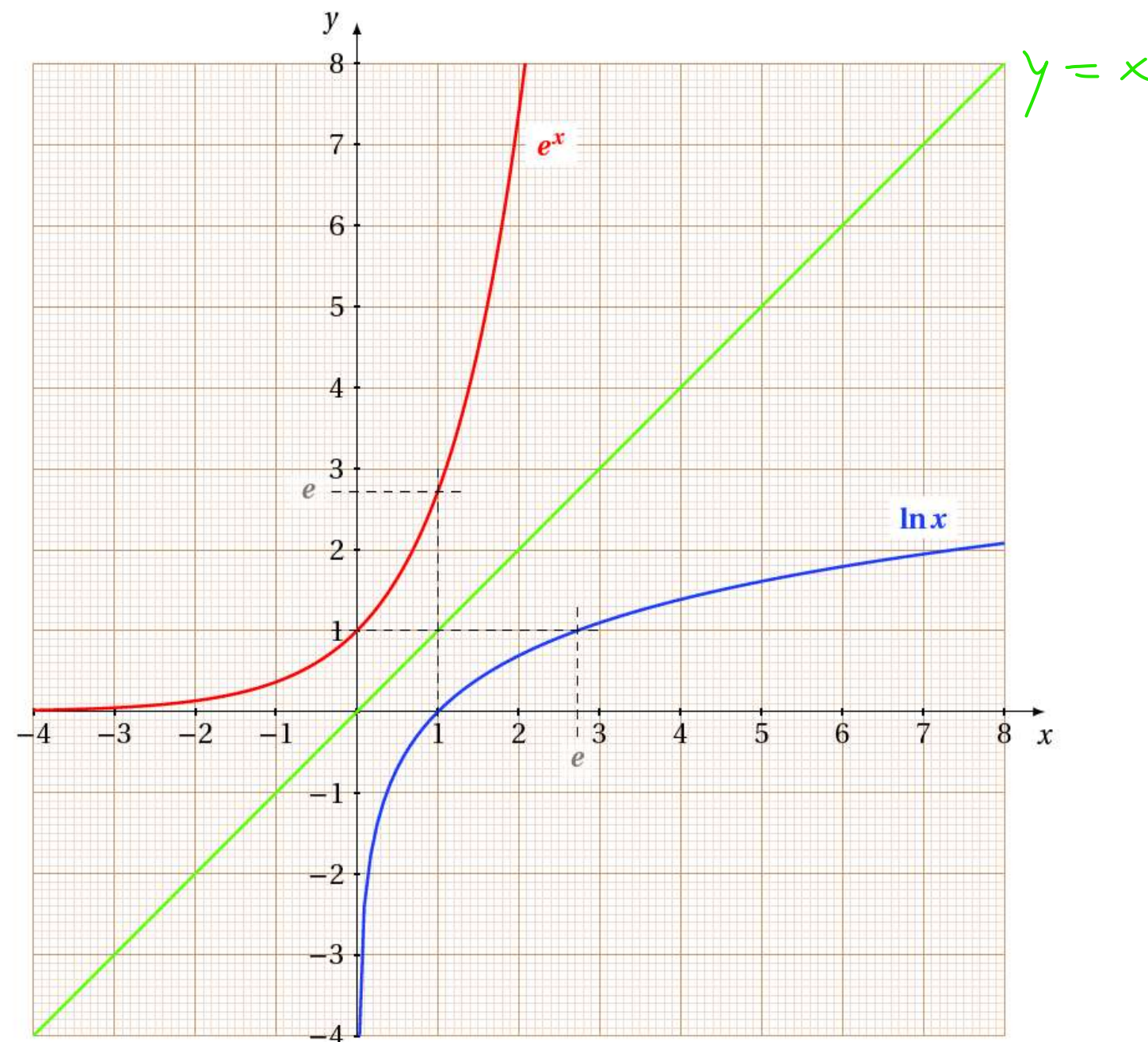
En d'autres termes, $\ln y$ est l'unique antécédent de y pour la fonction exponentielle $x \mapsto e^x$.

Ceci montre que la fonction exponentielle $\mathbb{R} \rightarrow]0, +\infty[, x \mapsto \exp(x)$ est **invertible** et que la fonction $\ln$ est sa réciproque. Ou encore:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y > 0$$

$$\exp(x) = y \iff x = \ln(y).$$

Exemple: logarithme et exponentielle (suite)



On rappelle les limites de $\ln$ et $\exp$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \ln(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \exp(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \exp(x) = +\infty.$$

Contenu de la section

Fonctions réciproques

Définitions

Fonctions réciproques

Logarithme et exponentielle

Fonctions trigonométriques réciproques

Continuité des fonctions réciproques

Nous avons vu les fonctions $\sin$, $\cos$ et $\tan$ dans le cours de trigonométrie.

2 π -périodique

on atteint uniquement $[-1; 1]$

pas surj.

Si on regarde les fonctions $\sin : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $\cos : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ces fonctions ne sont jamais bijectives.

Par exemple car $\sin(0) = \sin(2\pi) = 0$ et $\cos(0) = \cos(2\pi) = 1$.

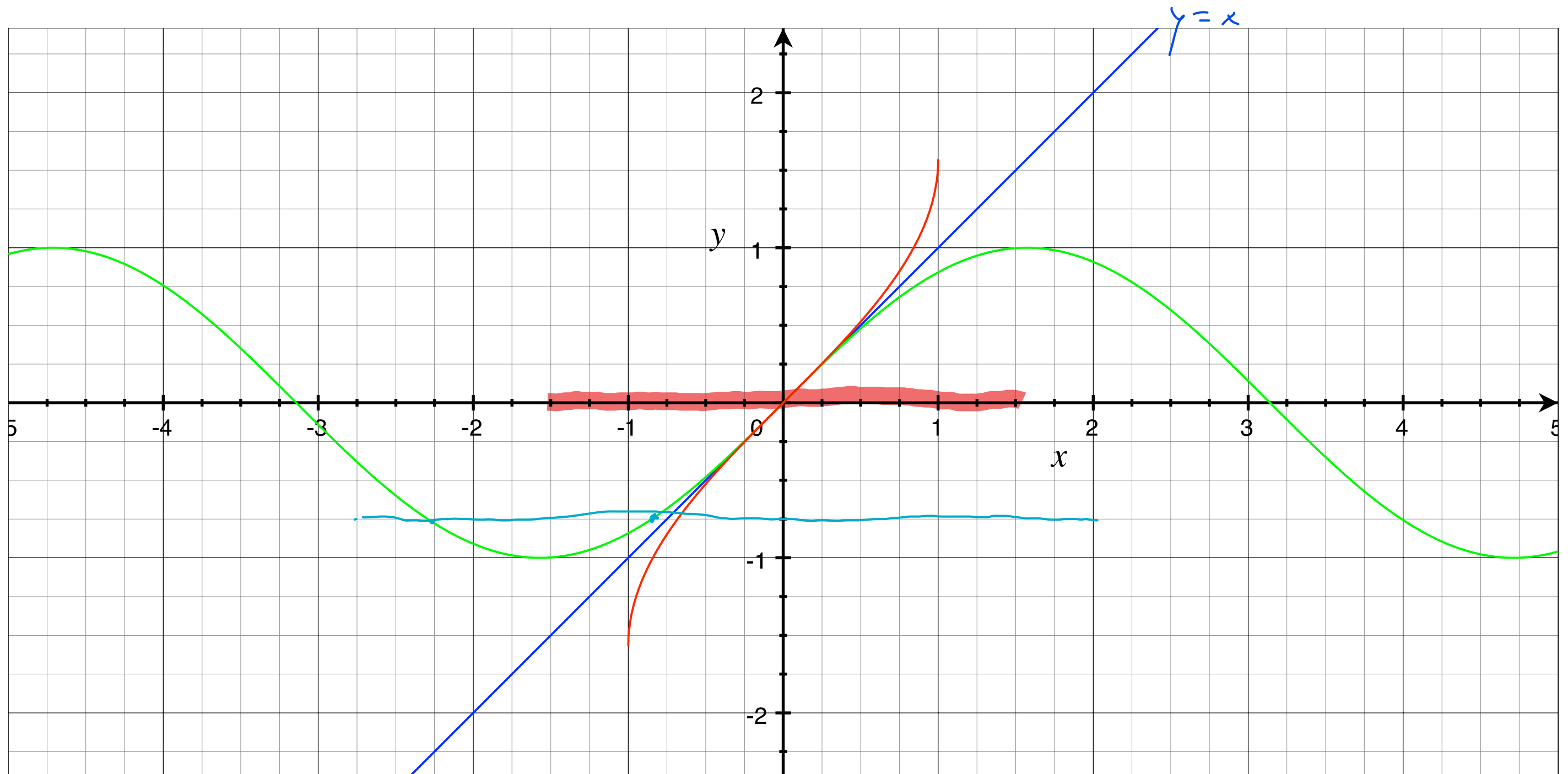
pas injectif.

Nous allons maintenant voir que si on se limite au départ à des valeurs plus restreintes en x , ces fonctions deviennent inversibles.

Réciproque de sin: arcsinus

La fonction $\sin : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow [-1, 1]$ possède une réciproque notée :

$$\arcsin : [-1, 1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$



Attention: Il est **faux** de dire que “ $\sin : \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$ admet une fonction réciproque”!

La fonction $\sin$ admet une réciproque **seulement sur un intervalle où elle est inversible**, c'est-à-dire sur un intervalle où tout élément de l'image a exactement un antécédent. $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ est un tel intervalle.

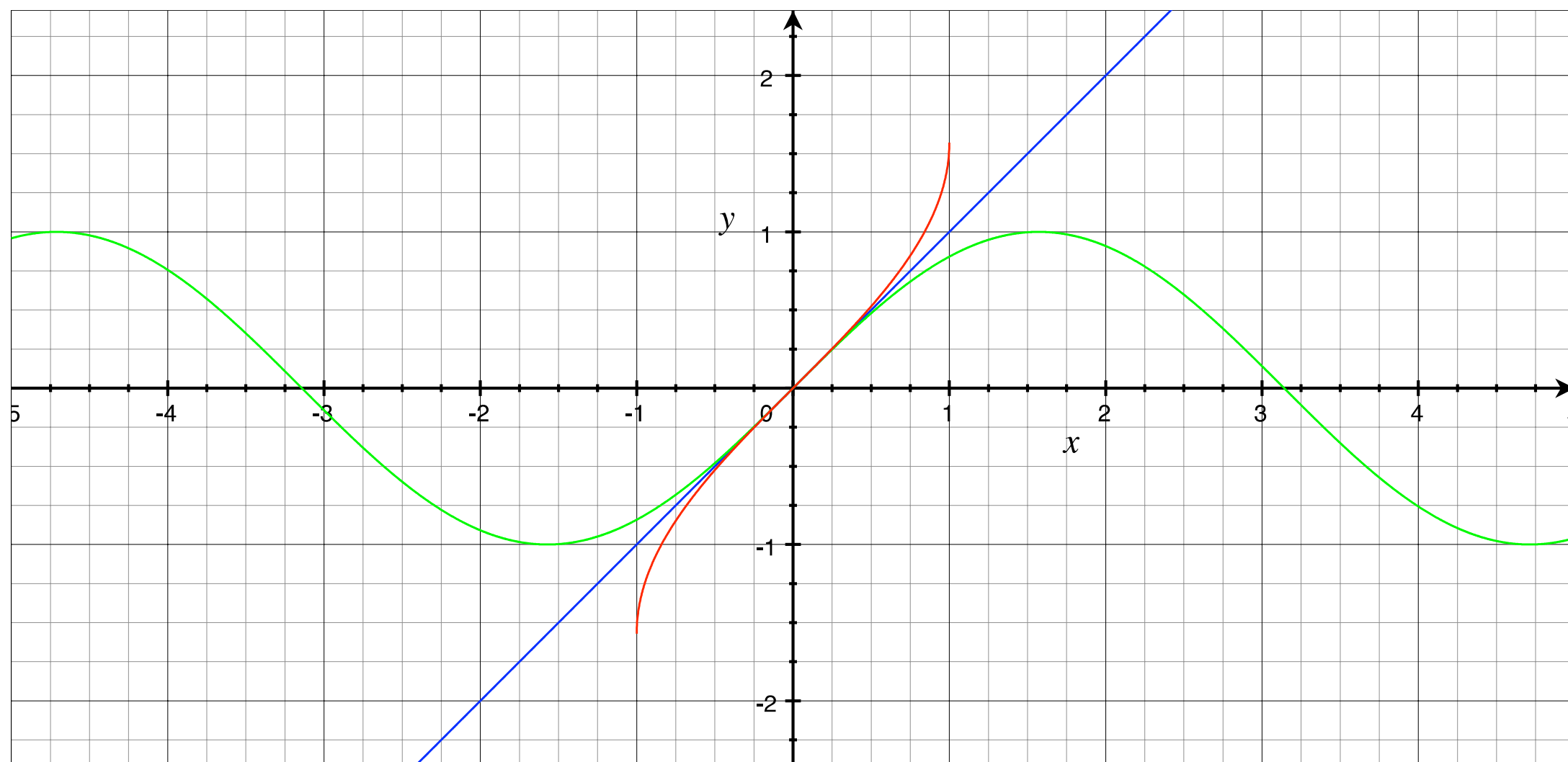


Figure: Graphes de $\sin$ (en vert) et $\arcsin$ (en rouge)

De la même manière: la fonction $\sin$ **n'est pas bijective (= inversible)** sur $[-\pi, \pi]$!

Réciproque de cos: arccosinus

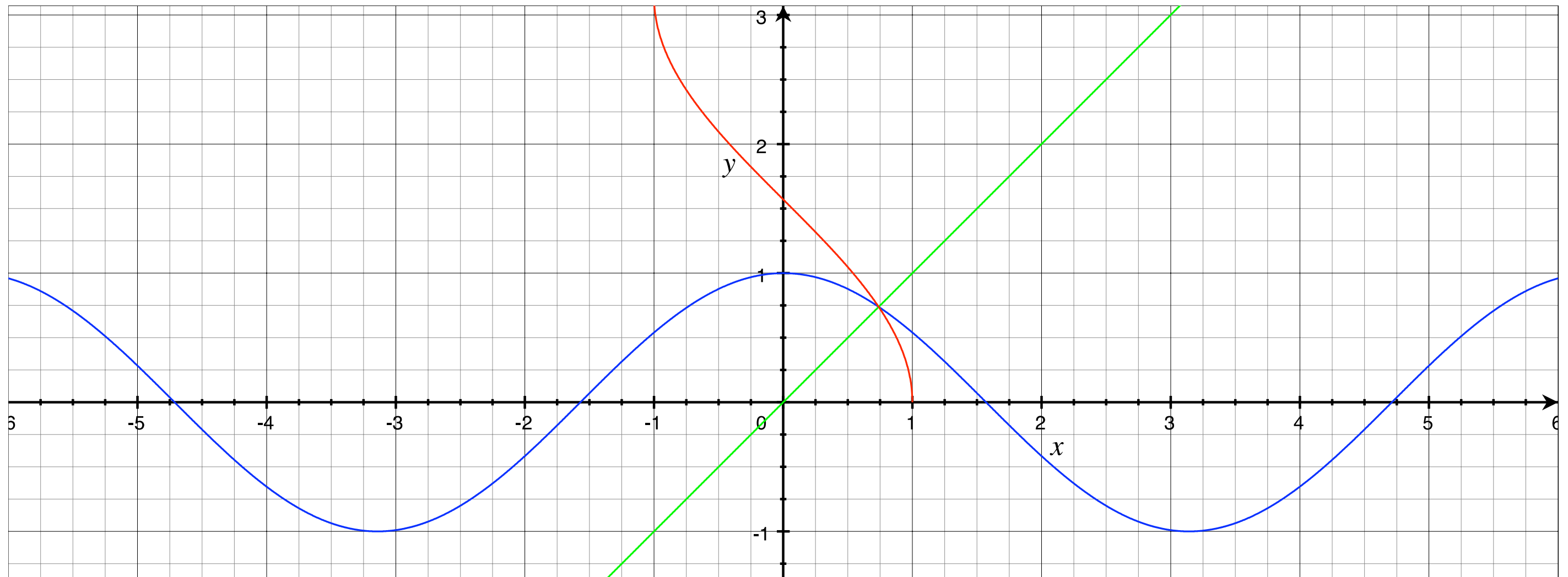


Figure: Graphes de $\cos$ (bleu) et $\arccos$ (rouge)

Réciproque de cos: Arccosinus

La réciproque de $\cos : [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$ est

$$\arccos : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$$

Car $\cos$ est bijective de $[0, \pi]$ sur $[-1, 1]$.

Rq: $\cos : [-\pi; 0] \rightarrow [-1; 1]$
est aussi bijective
 $\Rightarrow$ admet une inverse
 $f^{-1} : [-1; 1] \rightarrow [-\pi; 0]$

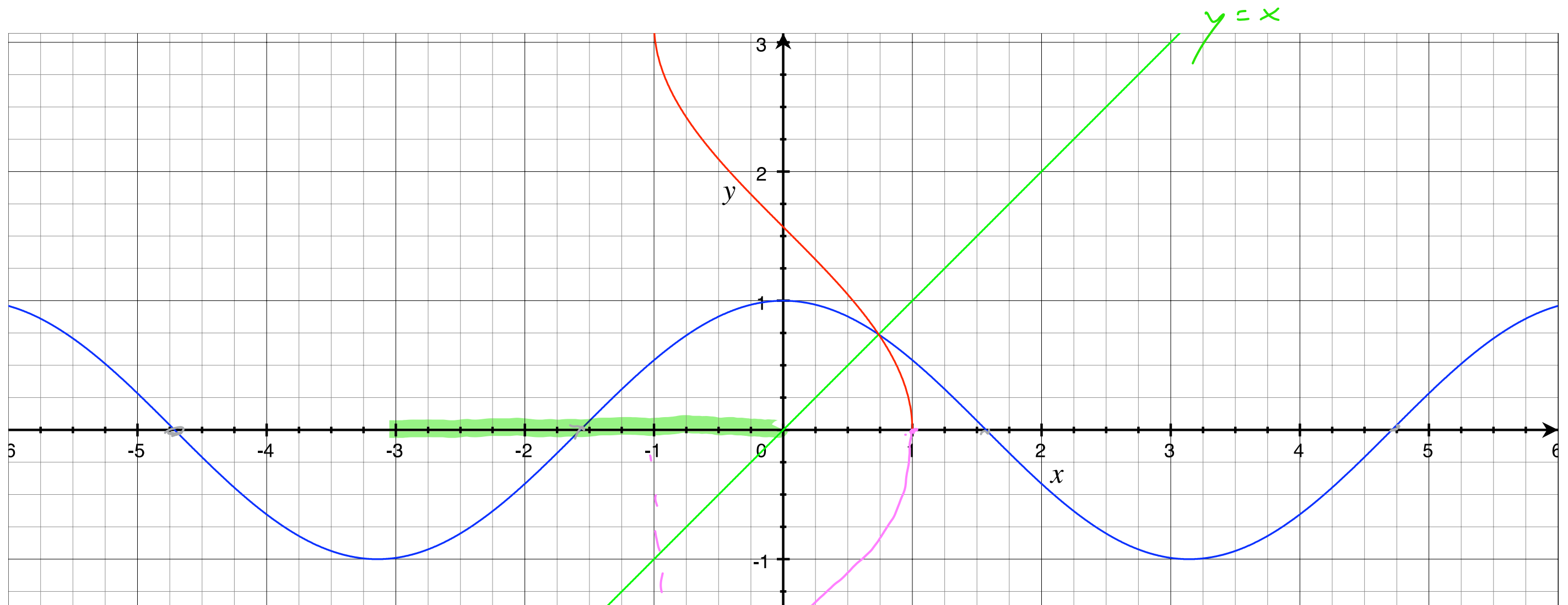


Figure: Graphes de $\cos$ (bleu) et $\arccos$ (rouge)

La fonction tan

Rappelons la définition donnée dans le cours de trigonométrie:

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}.$$

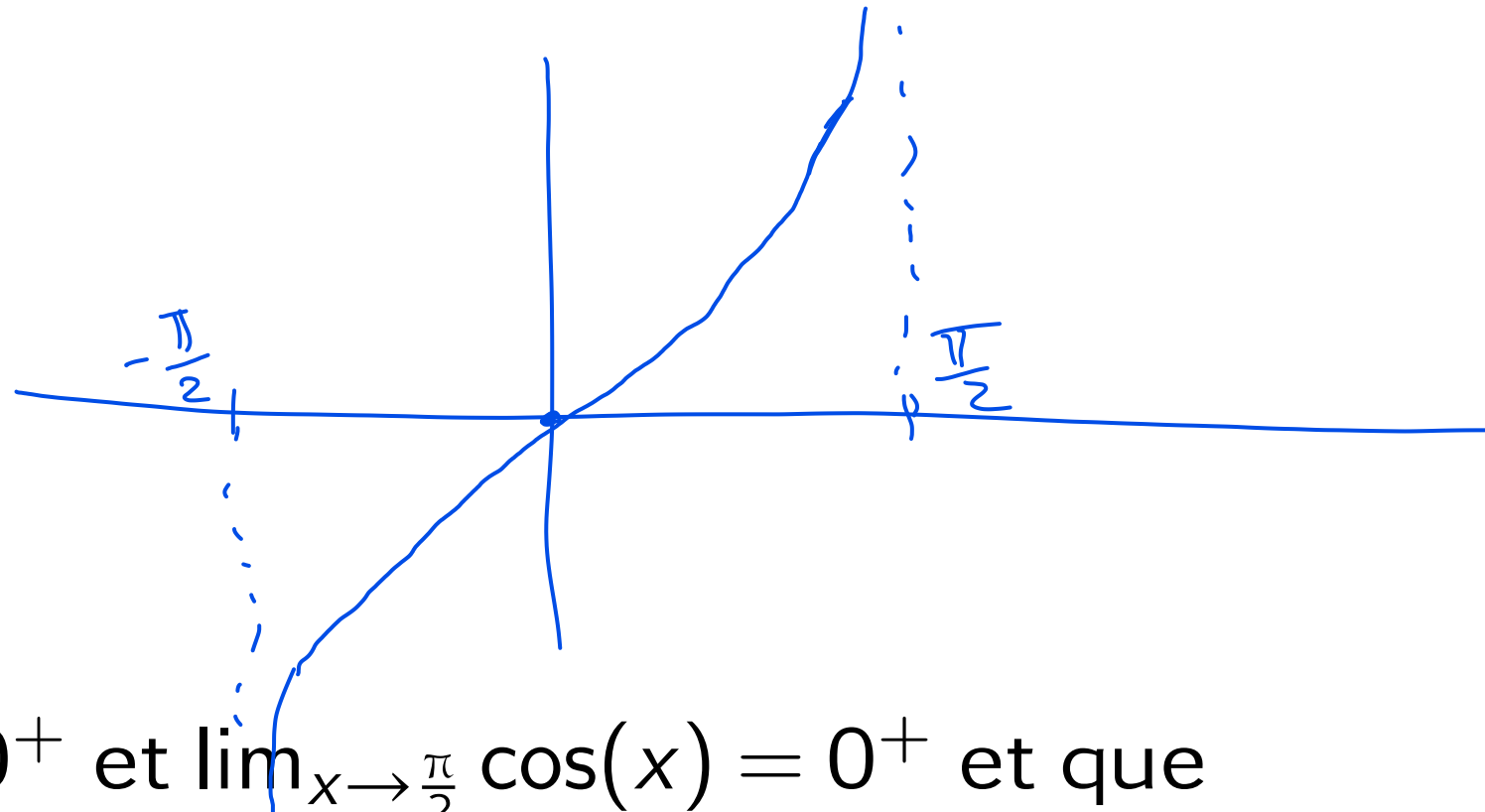
Cette définition a du sens tant que $\cos(x) \neq 0$, c'est-à-dire tant que $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ pour un certain entier $k \in \mathbb{Z}$.

La fonction tan est donc bien définie **et continue** sur tout intervalle de la forme $]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi[$.

Comme tan est en plus π -périodique, il suffit de l'étudier sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

La fonction tan

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$



Comme $\lim_{\substack{x \rightarrow -\frac{\pi}{2} \\ x > -\frac{\pi}{2}}} \cos(x) = 0^+$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow \frac{\pi}{2} \\ x < \frac{\pi}{2}}} \cos(x) = 0^+$ et que

$\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$ et $\sin(-\frac{\pi}{2}) = -1$ les règles sur les limites donnent:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow -\frac{\pi}{2} \\ x > -\frac{\pi}{2}}} \tan(x) = -\infty \text{ et } \lim_{\substack{x \rightarrow \frac{\pi}{2} \\ x < \frac{\pi}{2}}} \tan(x) = +\infty.$$

$$= \frac{1}{0^+}$$

$$\left(- \frac{1}{0^+} = -(+\infty) = -\infty \right)$$

Réciproque de tan: arctangente

$\tan : \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\rightarrow \underbrace{\left]-\infty, \infty\right[}_{\mathbb{R}}$ est une bijection. Sa fonction réciproque est alors notée

$$\text{arctg} : \underbrace{\left]-\infty, \infty\right[}_{\mathbb{R}} \rightarrow \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$$

arctan

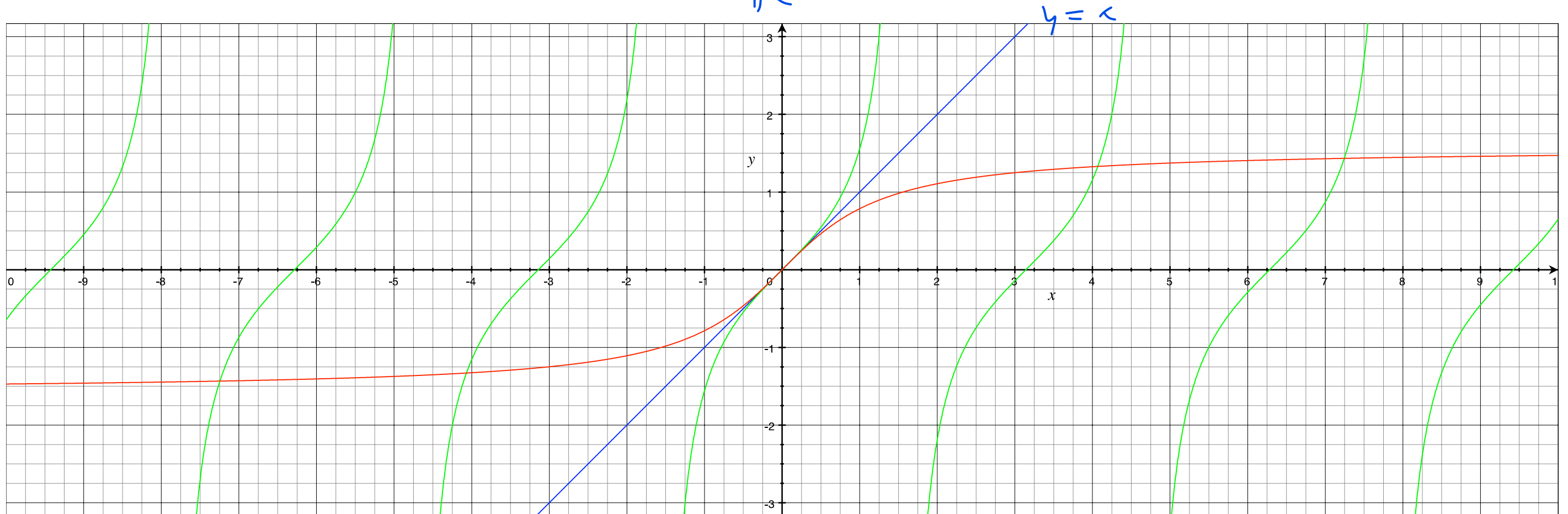


Figure: Graphes de **tan** (vert) et **arctg** (rouge)

On peut aussi définir la réciproque de $\cotg :]0, \pi[\rightarrow]-\infty, \infty[$.

Contenu de la section

Fonctions réciproques

Définitions

Fonctions réciproques

Logarithme et exponentielle

Fonctions trigonométriques réciproques

Continuité des fonctions réciproques

Continuité des fonctions réciproques

Résultat

Soit f une fonction réelle bijective définie sur un intervalle. Si f est continue en a , alors sa réciproque est continue en $f(a)$.

Attention, ça ne marche plus si f n'est pas définie sur un intervalle!
Par exemple si f est définie sur une union d'intervalles.

En particulier les fonctions arcsin, arccos et arctg sont continues sur leur domaine de définition.