

MATH-F112 Module T

Correction du TP2

Combinatoire et Etude basique de fonctions

Exercice 2.24

- (c) Pour ce troisième point, il est question de faire un choix, sans qu'aucune notion d'ordre n'intervienne. On peut donc résoudre l'exercice avec des combinaisons. On doit choisir 3 boules rouges (parmi 10) et 2 boules vertes (parmi 3), cela donne :

$$\frac{10!}{3!7!} \frac{3!}{2!1!} = 360.$$

Dans la deuxième partie de l'exercice, on va suivre la "règle" du *worst case scenario*.

- (e) On veut être sûr d'avoir 2 boules vertes dans le lot de boules qu'on aura tiré. Avec de la chance, on peut ne tirer que 2 boules et qu'elles soient toutes les deux vertes. Mais ce n'est pas une certitude. Pour être sûr, on doit partir du principe que l'on n'a pas de chance, et que les premières boules qu'on tire soient toutes rouges. Mais il n'y a que 10 boules rouges au total, donc la onzième que l'on tirera sera forcément verte. Dès lors, avec 12 boules, on est sûr et certain qu'au moins 2 d'entre-elles seront vertes.

Exercice 2.27

- ★ Le but ici est donc de trouver pour quelle longueur de mot l'on dispose d'assez de possibilités pour "codifier" toutes les lettres de l'alphabet. Si on prend des mots de longueur 1, on a logiquement que deux possibilités, le point (•) ou le trait (—). Si on considère des mots de longueur 2, chacun des deux emplacements a deux possibilités, et l'on se retrouve donc avec $2 \times 2 = 4$ possibilités :

•• | —• | •— | ——

On remarque donc que le nombre de mots possibles de longueur k vaut 2^k . Il suffit donc de trouver la première puissance de 2 qui soit plus grande ou égale à 26, et il s'agit de $32 = 2^5$. Il faut donc prendre des mots de longueur 5.

- ★ De manière totalement similaire, on trouve qu'il faut prendre des mots de longueur 8.

Exercice 2.30

Considérons les notations suivantes :

| = séparation représentant la fin d'un boîte

o = boule

On forme un code de la forme

$$oo | ooo || oo | oooo |$$

Chaque code est constitué de r symboles o et de n symboles $|$, le dernier symbole $|$ occupant toujours la dernière place du code. Le code ci-dessus traduit donc 2 boules dans la 1^{ère} boîte, 3 dans la 2^{ème}, 3^{ème} boîte vide, 2 boules dans la 4^{ème} et 4 dans la dernière.

Le problème se résume donc, soit à choisir la place des r boules dans le code de longueur $n + r - 1$ (vu que la dernière place est toujours occupée par un $|$), soit à choisir la place des $(n - 1)$ $|$ dans le code. On a donc :

$$\binom{n+r-1}{r} = \binom{n+r-1}{n-1}$$

Exercice 2.39

- (a) Vu que les lettres DEF doivent être consécutives, on va les considérer comme un bloc et comme on veut uniquement le mot DEF (et pas FED, EDF, ...), l'ordre des lettres D, E et F est fixé. Le problème revient donc simplement à compter le nombre de permutations de 4 objets, à savoir A, B, C et DEF, ce qui donne :

$$4! = 24.$$

- (b) Si on ne figeait pas l'ordre de D, E et F, on aurait la permutation de 6 lettres distinctes, donc :

$$6! = 720$$

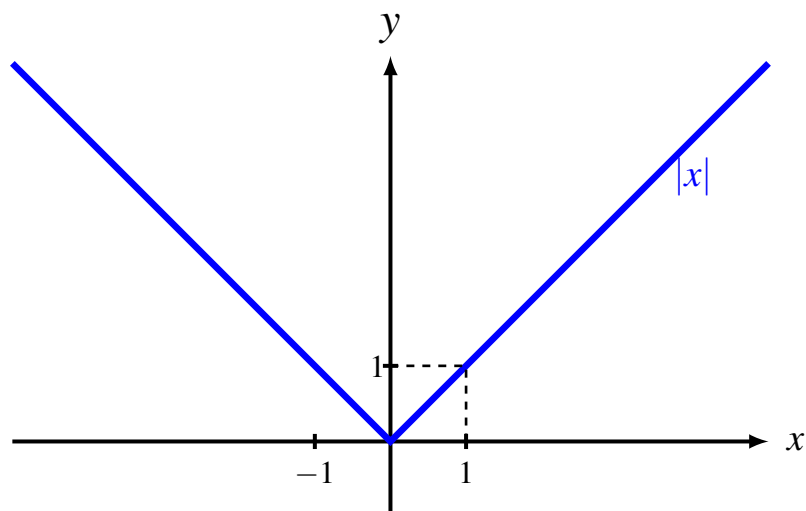
Mais comme on veut voir apparaître D, E et F dans l'ordre, il faut ne pas tenir compte de toutes les permutations possible de D, E et F, ce qui livre :

$$\frac{6!}{3!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3!}{3!} = 6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$$

Etude basique de fonctions

Exercice 2.20

(2) Graphe de la fonction $f(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \rightarrow |x|$



Exercice 4.1

(a) $x \rightarrow \sqrt{1-x^2}$;

On a une racine paire. Donc, le radicant doit être positif.

$$1 - x^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 1 \geq x^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 \leq 1$$

$$\Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1$$

$$\Rightarrow \text{Dom}f = [-1, 1]$$

(d) $x \rightarrow \sqrt{1+x} - 2\sqrt[4]{5-x}$;

On a deux racines paires. Donc, les deux radicans doivent être positifs.

$$1+x \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x \geq -1$$

$$5-x \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 5 \geq x$$

$$\Leftrightarrow x \leq 5$$

$$\Rightarrow \text{Dom}f = [-1, 5]$$

(e) $x \rightarrow \frac{x^2+1}{1+\sqrt{x^2-9}}$;

On a ici une fraction dont le dénominateur doit être différent de 0 et une racine dont le radicaant doit être positif.

$$1 + \sqrt{x^2-9} \neq 0$$

$$\text{Comme } \sqrt{x^2-9} \geq 0$$

$$\Rightarrow 1 + \sqrt{x^2-9} > 0$$

$$x^2 - 9 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 \geq 9$$

$$\Leftrightarrow x \leq -3 \text{ ou } x \geq 3$$

$$\Rightarrow \text{Dom}f =]-\infty, -3] \cup [3, +\infty[$$

(j) $x \rightarrow 4 \cdot \sqrt{|x|}$;

On a une racine paire, donc le radicaant doit être positif.

$$|x| \geq 0 \text{ ce qui est toujours vrai par définition de la valeur absolue}$$

$$\Rightarrow \text{Dom}f = \mathbb{R}$$

Exercice 4.4

(a) $f(x) = x^2$

- Parité

$$f(-x) = (-x)^2 = (x)^2$$

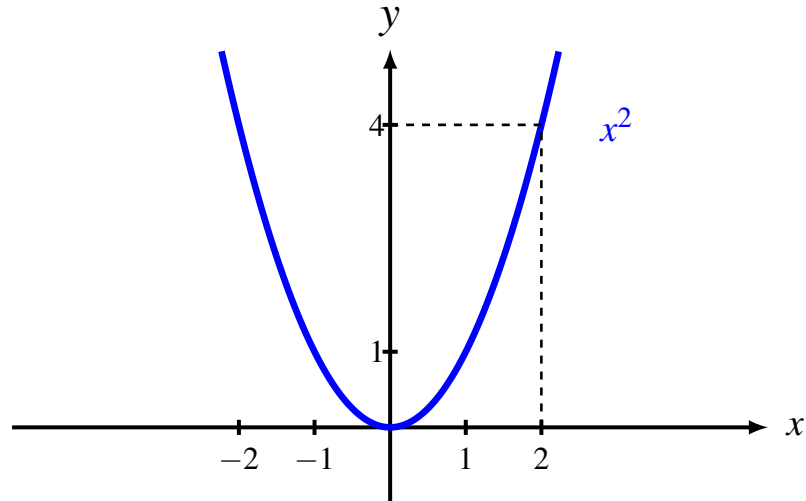
$$\Rightarrow f(-x) = f(x)$$

Par conséquent, on déduit que la fonction $f(x) = x^2$ est paire.

- Périodicité

La fonction $f(x) = x^2$ n'est pas périodique.

- Graphe pour confirmation



On observe bien, d'une part, le fait que cette fonction est paire car il y a une symétrie orthogonale par rapport à l'axe y , et d'autre part, le fait que sur $\mathbb{R}$, cette fonction n'est pas périodique.

(e) $f(x) = \sec(x)$

- Parité

$$f(-x) = \sec(-x) = \frac{1}{\cos(-x)} = \frac{1}{\cos(x)} \text{ car } \cos(x) \text{ est paire}$$

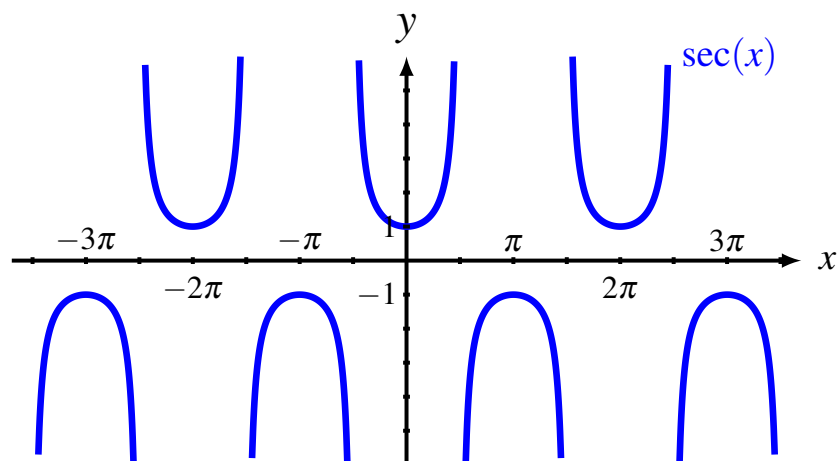
$$\Rightarrow f(-x) = f(x)$$

Par conséquent, on déduit que la fonction $f(x) = \sec(x)$ est paire.

- Périodicité

La fonction $\cos(x)$ étant périodique de période 2π , la fonction $f(x) = \sec(x) = \frac{1}{\cos(x)}$ est aussi périodique de période 2π .

- Graphe pour confirmation



On observe bien, d'une part, le fait que cette fonction est paire car il y a une symétrie orthogonale par rapport à l'axe y , et d'autre part, le fait que sur $\mathbb{R}$, cette fonction est périodique de période 2π .

(f) $y = x^3 \cos(x)$;

- Parité

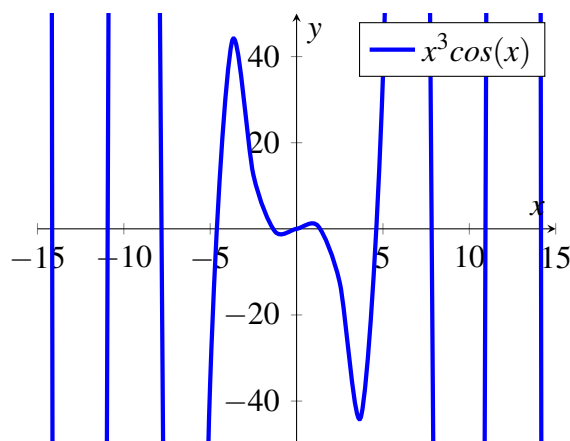
$$\begin{aligned} f(-x) &= (-x)^3 \cdot \cos(-x) = -(x^3 \cdot \cos(x)) = -f(x) \\ &\Rightarrow f(-x) = -f(x) \end{aligned}$$

Par conséquent, on déduit que la fonction $f(x) = x^3 \cos(x)$ est impaire.

- Périodicité

La fonction $f(x) = x^3 \cdot \cos(x)$ n'est pas périodique.

- Graphe pour confirmation



On observe bien, d'une part, le fait que cette fonction est impaire car il y a une symétrie centrale par rapport à l'origine, et d'autre part, le fait que sur $\mathbb{R}$, cette fonction n'est pas périodique.

(g) $f(x) = |x| + \sin(x)$

- Parité

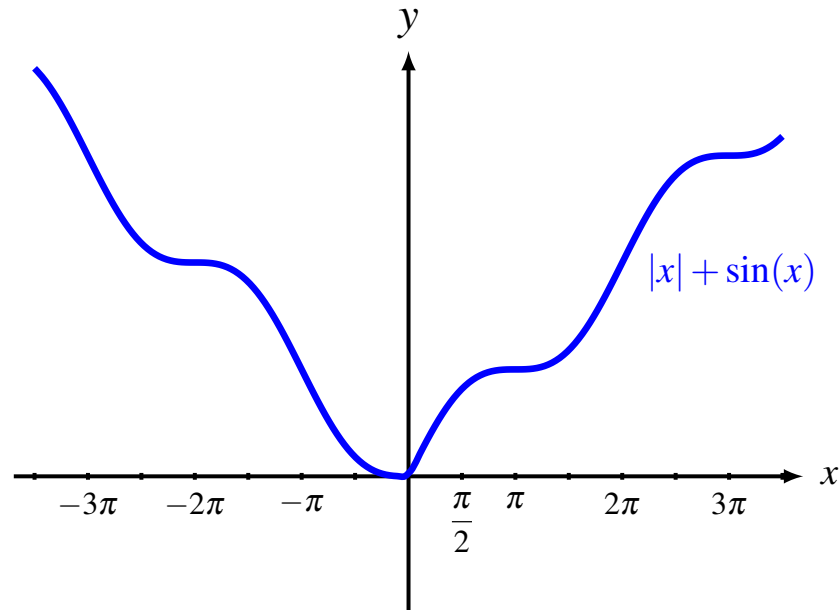
$$\begin{aligned} f(-x) &= |-x| + \sin(-x) \\ &\Leftrightarrow f(-x) = |x| - \sin(x) \\ &\Rightarrow f(-x) \neq f(x) \text{ et } f(-x) \neq -f(x) \end{aligned}$$

Par conséquent, on déduit que la fonction $f(x) = |x| + \sin(x)$ est ni paire ni impaire.

- Périodicité

La fonction $f(x)$ n'est pas périodique.

- Graphe pour confirmation



On observe bien, d'une part le fait que cette fonction est ni paire ni impaire car il n'y a ni symétrie orthogonale par rapport à l'axe y , ni symétrie centrale par rapport à l'origine et d'autre part, le fait que sur $\mathbb{R}$, cette fonction n'est pas périodique.

(i) $f(x) = \cos(5x) + \tan(5x)$

- Parité

$$\begin{aligned} f(-x) &= \cos(-5x) + \tan(-5x) = \cos(-5x) + \frac{\sin(-5x)}{\cos(-5x)} = \cos(5x) - \frac{\sin(5x)}{\cos(5x)} \\ &\Rightarrow f(-x) \neq f(x) \neq -f(x) \end{aligned}$$

On en déduit que la fonction $f(x) = \cos(5x) + \tan(5x)$ n'est ni paire, ni impaire.

- Périodicité

La fonction $\cos(x)$ est périodique de période 2π .

$$f(x) = \cos(5x) = \cos(5x + 2k\pi) = \cos(5 \cdot (x + \frac{2k\pi}{5})) = f(x + \frac{2k\pi}{5})$$

La fonction $\cos(5x)$ est périodique de période $\frac{2\pi}{5}$.

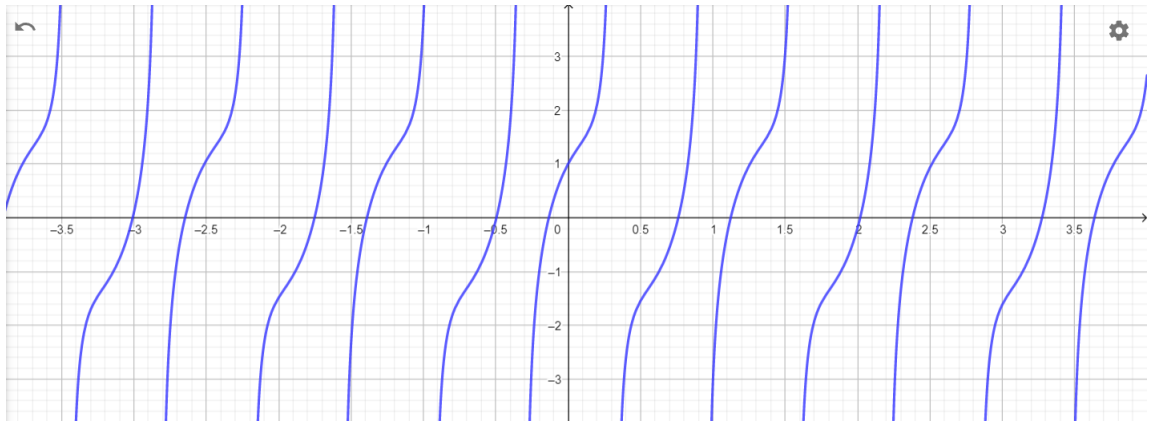
La fonction $\tan(x)$ est périodique de période π .

$$f(x) = \tan(5x) = \tan(5x + k\pi) = \tan(5 \cdot (x + \frac{k\pi}{5})) = f(x + \frac{k\pi}{5})$$

La fonction $\tan(5x)$ est périodique de période $\frac{\pi}{5}$.

On en déduit que la fonction $f(x) = \cos(5x) + \tan(5x)$ est périodique de période $\frac{2\pi}{5}$.

• Graphe pour confirmation



On observe bien, d'une part le fait que cette fonction est ni paire ni impaire car il n'y a ni symétrie orthogonale par rapport à l'axe y, ni symétrie centrale par rapport à l'origine et d'autre part, le fait qu'elle est périodique de période $\frac{2\pi}{\lambda}$.

(j) $f(x) = A \cdot \cos(\lambda \cdot x) + B \cdot \sin(\lambda \cdot x)$

- Si $\lambda = 0$, la fonction devient $f(x) = A$, fonction constante donc paire et périodique $\forall C \neq 0$
- Si $\lambda \neq 0$, il faut alors discuter sur la valeur de A et de B :
 - ★ Si $A = 0$ et $B = 0$, la fonction devient $f(x) = 0$, et est donc paire et impaire et périodique $\forall C \neq 0$
 - ★ - Si $A = 0$ et $B \neq 0$, la fonction devient $f(x) = B \cdot \sin(\lambda \cdot x)$, elle est donc impaire et de période $\frac{2\pi}{\lambda}$
 - ★ - Si $A \neq 0$ et $B = 0$, la fonction devient $f(x) = A \cdot \cos(\lambda \cdot x)$, elle est donc paire et de période $\frac{2\pi}{\lambda}$
 - ★ - Si $A \neq 0$ et $B \neq 0$, on a :

• Parité

$$\begin{aligned} f(-x) &= A \cdot \cos(-\lambda \cdot x) + B \cdot \sin(-\lambda \cdot x) = A \cdot \cos(\lambda \cdot x) - B \cdot \sin(\lambda \cdot x) \\ &\Rightarrow f(-x) \neq f(x) \neq -f(x) \end{aligned}$$

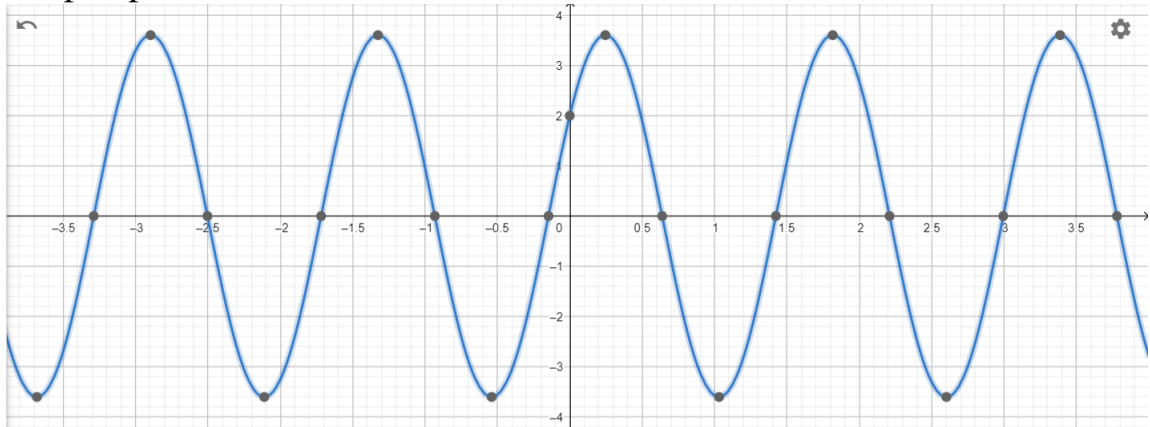
Par conséquent, on déduit que la fonction $f(x) = A \cdot \cos(\lambda \cdot x) + B \cdot \sin(\lambda \cdot x)$ n'est paire, ni impaire.

• Périodicité

$$\begin{aligned} \cos(\lambda \cdot x) &= \cos(\lambda \cdot x + 2 \cdot k\pi) = \cos(\lambda \cdot (x + \frac{2 \cdot k\pi}{\lambda})) \\ \sin(\lambda \cdot x) &= \sin(\lambda \cdot x + 2 \cdot k\pi) = \sin(\lambda \cdot (x + \frac{2 \cdot k\pi}{\lambda})) \end{aligned}$$

Comme $f(x) = A \cdot \cos(\lambda \cdot x) + B \cdot \sin(\lambda \cdot x)$ est la somme de 2 fonctions périodiques de période $\frac{2\pi}{\lambda}$, elle est périodique de période $\frac{2\pi}{\lambda}$.

- Graphe pour confirmation



Le graphique représente le graphe de la fonction $f(x) = 2.\cos(4.x) + 3.\sin(4.x)$. On observe bien, d'une part le fait que cette fonction n'est ni paire ni impaire car il n'y a ni symétrie orthogonale par rapport à l'axe y, ni symétrie centrale par rapport à l'origine et d'autre part, le fait que la fonction est périodique de période $\frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$.

(k) $f(x) = \sin^2(x)$

- Parité

$$\begin{aligned} f(-x) &= \sin^2(-x) = (-\sin(x))^2 = \sin^2(x) \\ &\Rightarrow f(-x) = f(x) \end{aligned}$$

Par conséquent, on déduit que la fonction $f(x) = \sin^2(x)$ est paire.

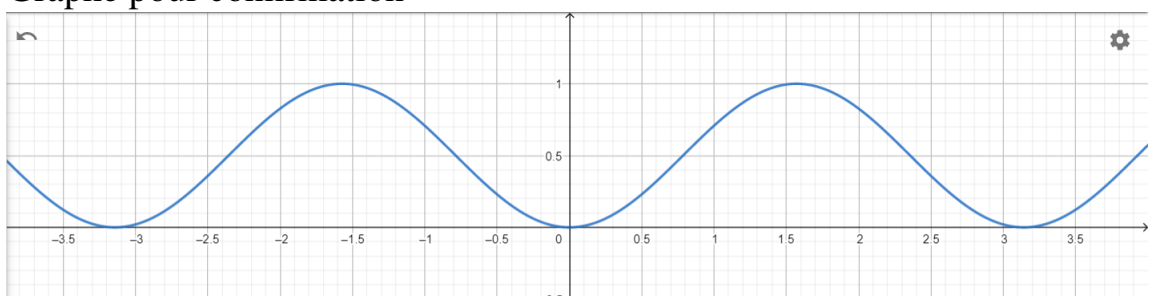
- Périodicité

$$\begin{aligned} \sin^2(x + k\pi) &= \sin^2(x) && \text{si } k \text{ est paire} \\ &= (-\sin(x))^2 = \sin^2(x) && \text{si } k \text{ est impaire} \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ La fonction $f(x) = \sin^2(x)$ est périodique de période π

On en déduit que la fonction $f(x) = \sin^2(x)$ est périodique de période π

- Graphe pour confirmation



On observe bien, d'une part le fait que cette fonction est paire car il y a symétrie orthogonale par rapport à l'axe y et d'autre part, le fait qu'elle est périodique de période π

(l) $f(x) = \sin(x^2)$

- Parité

$$\begin{aligned} f(-x) &= \sin((-x)^2) = \sin(x)^2 \\ &\Rightarrow f(-x) = f(x) \end{aligned}$$

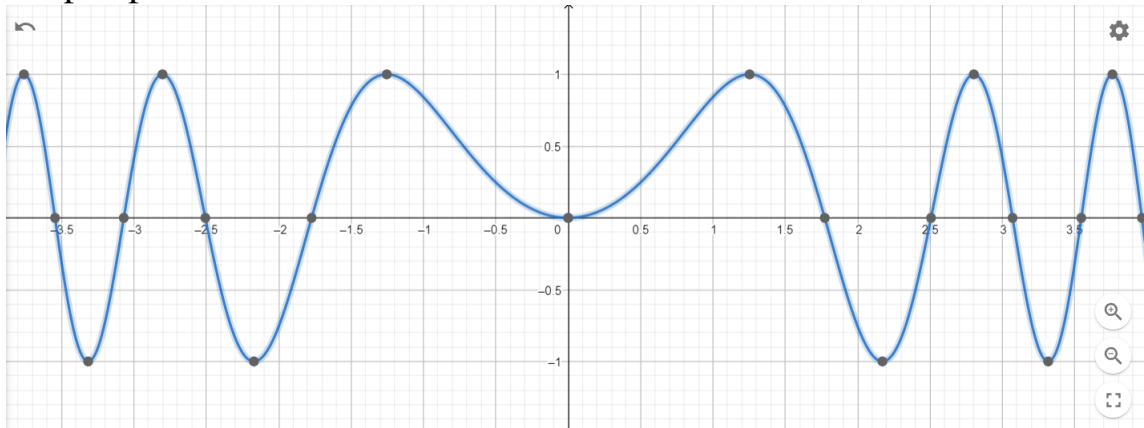
Par conséquent, on déduit que la fonction est paire.

- Périodicité

$$\sin(x^2) = \sin(x^2 + 2k\pi)$$

Comme il n'est pas possible d'exprimer $(x^2 + 2k\pi)$ sous la forme $(x + 2k'\pi)^2$, la fonction est non périodique.

- Graphe pour confirmation



Le graphique représente le graphe de la fonction $f(x) = \sin(x^2)$. On observe bien, d'une part le fait que cette fonction est paire car il y a symétrie orthogonale par rapport à l'axe y et d'autre part, le fait qu'elle n'est pas périodique.

(n) $f(x) = \sin(3x) + 2\sin(6x)$

- Parité

$$\begin{aligned} f(-x) &= \sin(-3x) + 2\sin(-6x) \\ &\Leftrightarrow f(-x) = -\sin(3x) - 2\sin(6x) \\ &\Leftrightarrow f(-x) = -[\sin(3x) + 2\sin(6x)] \\ &\Leftrightarrow f(-x) = -f(x) \end{aligned}$$

Par conséquent, on déduit que la fonction $f(x) = \sin(3x) + 2\sin(6x)$ est impaire.

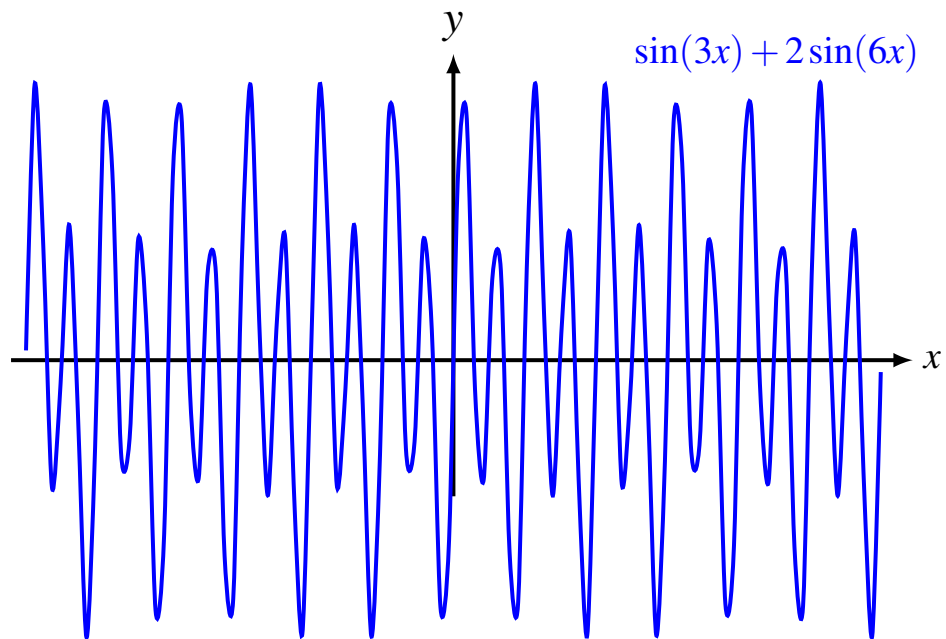
- Périodicité

$$\hookrightarrow \sin(3x) \text{ a une période de } \frac{2\pi}{3}.$$

$\hookrightarrow \sin(6x)$ a une période de $\frac{\pi}{3}$.

La période de $f(x) = \sin(3x) + 2\sin(6x)$ est le plus petit commun multiple de $\frac{2\pi}{3}$ et $\frac{\pi}{3}$, c'est-à-dire $\frac{2\pi}{3}$.

- Graphe pour confirmation



On observe bien, d'une part le fait que cette fonction est impaire car il y a symétrie centrale par rapport à l'origine et d'autre part, le fait que sur $\mathbb{R}$, la période est égale à $\frac{2\pi}{3}$.