

Correction du TP3

Trigonométrie et fonctions exponentielles

Fonctions exponentielles (& logarithmiques)

Exercice 8.1

(a)

$$\log_2(32) = \log_2(2^5) = 5\log_2(2) = 5.1 = 5$$

(c)

$$\log(0,0000001) = \log(10^{-7}) = -7\log(10) = -7.1 = -7$$

(f)

$$\log_{\frac{1}{2}}(4) = \frac{\log_2(4)}{\log_2(\frac{1}{2})} = \frac{\log_2(2^2)}{\log_2(2^{-1})} = \frac{2\log_2(2)}{-1\log_2(2)} = \frac{2.1}{-1.1} = -2$$

(g)

$$\ln(e^{-7}) = -7\ln(e) = -7.1 = -7$$

(i)

$$\log_{\sqrt{32}}(32) = \frac{\log_2(32)}{\log_2(\sqrt{32})} = \frac{\log_2(2^5)}{\log_2(2^{\frac{5}{2}})} = \frac{5\log_2(2)}{\frac{5}{2}\log_2(2)} = \frac{5.1}{\frac{5}{2}.1} = 2$$

(j)

$$\log_{16}(8) = \frac{\log_2(8)}{\log_2(16)} = \frac{\log_2(2^3)}{\log_2(2^4)} = \frac{3\log_2(2)}{4\log_2(2)} = \frac{3.1}{4.1} = \frac{3}{4}$$

Exercice 8.3

(a)

$$\begin{aligned}\log_x(5) &= 0,5 \\ \Leftrightarrow x^{\log_x(5)} &= x^{0,5} \\ \Leftrightarrow 5 &= x^{0,5} \\ \Leftrightarrow (5)^2 &= (x^{0,5})^2 \\ \Leftrightarrow 25 &= x^{(2 \cdot 0,5)} \\ \Leftrightarrow 25 &= x\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}
\log_x(2) &= -2 \\
\Leftrightarrow x^{\log_x(2)} &= x^{(-2)} \\
\Leftrightarrow 2 &= x^{(-2)} \\
\Leftrightarrow (2)^{-\frac{1}{2}} &= \left(x^{(-2)}\right)^{-\frac{1}{2}} \\
\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} &= x \\
\Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} &= x
\end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned}
\log_x(a) &= a \\
\Leftrightarrow x^a &= a \\
\Leftrightarrow (x^a)^{\frac{1}{a}} &= a^{\frac{1}{a}} \\
\Leftrightarrow x &= \sqrt[a]{a}
\end{aligned}$$

(e)

$$\begin{aligned}
\log_x(a) &= -a \\
\Leftrightarrow x^{\log_x(a)} &= x^{-a} \\
\Leftrightarrow a &= x^{-a} \\
\Leftrightarrow (a)^{-\frac{1}{a}} &= (x^{-a})^{-\frac{1}{a}} \\
\Leftrightarrow (a)^{-\frac{1}{a}} &= x
\end{aligned}$$

(f)

$$\begin{aligned}
\log_x(a) &= \frac{1}{a} \\
\Leftrightarrow x^{\frac{1}{a}} &= a \\
\Leftrightarrow (x^{\frac{1}{a}})^a &= a^a \\
\Leftrightarrow x &= a^a
\end{aligned}$$

Exercice 8.6

(b)

$$\log_{10}(125) = \log \frac{1000}{8} = \log(10^3) - \log 2^3 = 3 - 3 \log 2 = 3 - 3a$$

(c)

$$\log_{10}(2,5) = \log \frac{10}{4} = \log 10 - \log 2^2 = 1 - 2 \log 2 = 1 - 2a$$

Exercice 8.7

$$\begin{aligned}
\log_a x = 3 &\Leftrightarrow a^3 = x \\
\log_{2a} x = 4 &\Leftrightarrow (2a)^4 = x \\
&\Rightarrow a^3 = (2a)^4 \\
&\Leftrightarrow a^3 = 16a^4 \\
&\Leftrightarrow 1 = 16a \text{ avec } a \neq 0 \text{ car } a \text{ est la base d'un logarithme} \\
&\Leftrightarrow a = \frac{1}{16} = 2^{-4} \\
&\Rightarrow x = a^3 = (2^{-4})^3 = 2^{-4 \cdot 3} = 2^{-12}
\end{aligned}$$

Exercice 8.8**1) Conditions d'existence**

$$\boxed{\log_x 5 \text{ et } \log_x 4}$$

$$\text{Dom} = \mathbb{R}_0^+$$

(1)

2) Résolution

$$\begin{aligned}
\log_x 5 &= \log_x 4 + 1 \\
\Leftrightarrow \log_x 5 &= \log_x 4 + \log_x x \\
\Leftrightarrow \log_x 5 &= \log_x (4x) \\
\Leftrightarrow 5 &= 4x \\
\Leftrightarrow x &= \frac{5}{4}
\end{aligned}$$

La solution appartient bien au domaine (1).

Exercice 8.9

$$\begin{aligned}
&\log_a (\log_a a^{a^x}) \\
&\Leftrightarrow \log_a (a^x \log_a a) \\
&\Leftrightarrow \log_a (a^x) \\
&\Leftrightarrow x \log_a a \\
&\Leftrightarrow x
\end{aligned}$$

Exercice 8.10

(a)

$$\log_3(x+2) + 1 = \log_3(x^2 + 4x)$$

1) Conditions d'existence

— Condition d'existence 1 : $\boxed{\log_3(x+2)}$

$$\begin{aligned} x+2 &> 0 \\ \text{Dom} &=]-2, +\infty[\end{aligned} \quad (2)$$

— Condition d'existence 2 : $\boxed{\log_3(x^2+4x)}$

$$\begin{aligned} x^2+4x &> 0 \\ \text{Dom} &= \mathbb{R} \setminus [-4, 0] \end{aligned} \quad (3)$$

— Intersection des deux conditions d'existence

En faisant l'intersection des domaines d'existence (2) et (3), on obtient

$$\text{Dom} = \mathbb{R}_0^+. \quad (4)$$

2) Résolution

$$\begin{aligned} \log_3(x+2) + 1 &= \log_3(x^2+4x) \\ \Leftrightarrow \log_3(x+2) + \log_3(3) &= \log_3(x^2+4x) \\ \Leftrightarrow \log_3(3(x+2)) &= \log_3(x^2+4x) \\ \Leftrightarrow 3(x+2) &= x^2+4x \\ \Leftrightarrow x^2+x-6 &= 0 \\ \Leftrightarrow x \in \{-3, 2\} \end{aligned} \quad (5)$$

En faisant l'intersection entre les conditions d'existence (6) et les solutions trouvées (5), on obtient une solution réelle unique :

$$x = 2$$

(d)

$$2\log_2(x) + \log_x(2) = 3$$

1) Conditions d'existence

— Condition d'existence 1 : $\boxed{\log_2(x)}$

$$\text{Dom} = \mathbb{R}_0^+ \quad (6)$$

— Condition d'existence 2 : $\boxed{\log_x(2)}$

$$\text{Dom} = \mathbb{R}_0^+ \setminus \{1\} \quad (7)$$

— Intersection des deux conditions d'existence

En faisant l'intersection des domaines d'existence (6) et (7), on obtient

$$\text{Dom} = \mathbb{R}_0^+ \setminus \{1\}. \quad (8)$$

2) Résolution

$$\begin{aligned}
 2\log_2(x) + \log_x(2) &= 3 \\
 \Leftrightarrow 2\log_2(x) + \log_x(2) &= 3 \\
 \Leftrightarrow 2\log_2(x) + \frac{\log_2(2)}{\log_2(x)} &= 3 \\
 \Leftrightarrow 2\log_2(x)\log_2(x) + \log_2(2) &= 3\log_2(x) \\
 \Leftrightarrow 2[\log_2(x)]^2 - 3\log_2(x) + 1 &= 0
 \end{aligned} \tag{9}$$

En posant

$$y = \log_2(x), \tag{10}$$

l'équation (9) peut se réécrire

$$2y^2 - 3y + 1 = 0 \tag{11}$$

Sachant que

$$\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = 1$$

les deux solutions de l'équation (11) sont

$$\begin{cases} y_1 = \frac{3 + \sqrt{1}}{4} = 1 \\ y_2 = \frac{3 - \sqrt{1}}{4} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

En vertu de (10), on a

$$\begin{cases} x_1 = 2^{y_1} = 2^1 = 2 \\ x_2 = 2^{y_2} = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2} \end{cases} \tag{12}$$

L'ensemble des solutions de l'équation s'écrit donc $S = \{2, \sqrt{2}\}$.

(e)

$$4\log x = \log(x^2 - 2) + \log 8$$

1) Conditions d'existence

— Condition d'existence 1 : $\log x$

$$\text{Dom} = \mathbb{R}_0^+ \tag{13}$$

— Condition d'existence 2 : $\log(x^2 - 2)$

$$x^2 - 2 > 0$$

$$x^2 > 2$$

$$\text{Dom} = \mathbb{R} \setminus [-\sqrt{2}, \sqrt{2}] \tag{14}$$

— Intersection des deux conditions d'existence

En faisant l'intersection des domaines d'existence (13) et (14), on obtient

$$\text{Dom} =]\sqrt{2}, +\infty[. \tag{15}$$

2) Résolution

$$\begin{aligned}
 4\log x &= \log(x^2 - 2) + \log 8 \\
 \Leftrightarrow \log(x^4) &= \log(8(x^2 - 2)) \\
 \Leftrightarrow \log(x^4)x &= \log(8x^2 - 16) \\
 \Leftrightarrow x^4 &= 8x^2 - 16 \\
 \Leftrightarrow x^4 - 8x^2 + 16 &= 0 \\
 \Leftrightarrow (x^2 - 4)^2 &= 0 \\
 \Leftrightarrow x^2 - 4 &= 0 \\
 \Leftrightarrow x \in \{-2, 2\} & \quad (16)
 \end{aligned}$$

En faisant l'intersection entre les conditions d'existence (15) et les solutions trouvées (16), on obtient une solution réelle unique :

$$x = 2$$

(g)

$$(\log_4 x)^2 - \log_x x + 1 = 0$$

1) Conditions d'existence

— Condition d'existence 1 : $\log_4(x)$

$$\text{Dom} = \mathbb{R}_0^+ \quad (17)$$

— Condition d'existence 2 : $\log_x(x)$

$$\text{Dom} = \mathbb{R}_0^+ \setminus \{1\} \quad (18)$$

— Intersection des deux conditions d'existence

En faisant l'intersection des domaines d'existence (17) et (18), on obtient

$$\text{Dom} = \mathbb{R}_0^+ \setminus \{1\}. \quad (19)$$

2) Résolution

$$\begin{aligned}
 (\log_4 x)^2 - \log_x x + 1 &= 0 \\
 \Leftrightarrow (\log_4 x)^2 - 1 + 1 &= 0 \\
 \Leftrightarrow (\log_4 x)^2 &= 0 \\
 \Leftrightarrow \log_4 x &= 0 \\
 \Leftrightarrow x &= 1 \quad (20)
 \end{aligned}$$

La solution trouvée (20) ne fait pas partie du domaine (19). Il n'y a donc pas de solution à cette équation.

$$x \in \emptyset$$

Exercice 8.15

(a)

$$\begin{aligned}2^x + 2^{x+1} &= 3 \\ \Leftrightarrow 2^x + 2 \cdot 2^x &= 3 \\ \Leftrightarrow (1+2)2^x &= 3 \\ \Leftrightarrow 3 \cdot 2^x &= 3 \\ \Leftrightarrow 2^x &= 1 \\ \Leftrightarrow x &= 0\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}e^x + e^{-x} &= 2 \\ \Leftrightarrow e^x \cdot e^x + e^x \cdot e^{-x} &= 2 \cdot e^x \\ \Leftrightarrow (e^x)^2 + 1 - 2 \cdot e^x &= 0 \\ \Leftrightarrow (e^x - 1)^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow e^x - 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow e^x &= 1 \\ \Leftrightarrow x &= 0\end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned}\left(\frac{9}{4}\right)^x - \frac{8}{27} &= 0 \\ \Leftrightarrow \left(\frac{9}{4}\right)^x &= \frac{8}{27} \\ \Leftrightarrow \left(\frac{3^2}{2^2}\right)^x &= \frac{2^3}{3^3} \\ \Leftrightarrow \left(\left(\frac{3}{2}\right)^2\right)^x &= \left(\left(\frac{3}{2}\right)^3\right)^{-1} \\ \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^{2x} &= \left(\frac{3}{2}\right)^{-3} \\ \Leftrightarrow 2x &= -3 \\ \Leftrightarrow x &= -\frac{3}{2}\end{aligned}$$

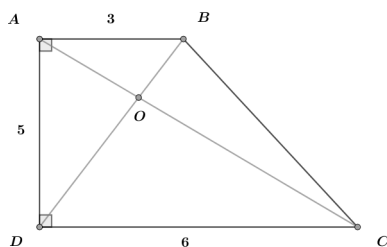
(e)

$$\begin{aligned}9^x - 2 \cdot 3^{x+1} &= 27 \\ \Leftrightarrow (3^2)^x - 2 \cdot 3 \cdot 3^x - 27 &= 0 \\ \Leftrightarrow (3^x)^2 - 6 \cdot 3^x - 27 &= 0 \\ \Leftrightarrow (3^x)^2 - 6 \cdot 3^x - 27 &= 0 \\ \Leftrightarrow 3^x &= \frac{6 \pm \sqrt{144}}{2} \\ \Leftrightarrow 3^x &= 3 \pm 6 \\ \Leftrightarrow x &= \log_3 9 \\ \Leftrightarrow x &= 2\end{aligned}$$

(g)

$$\begin{aligned}4^x - 5 \cdot 2^x + 6 &= 0 \\ \Leftrightarrow (2^x)^2 - 5 \cdot 2^x + 6 &= 0 \\ \Leftrightarrow 2^x &= \frac{5 \pm \sqrt{1}}{2} \\ \Leftrightarrow 2^x &\in \{2, 3\} \\ \Leftrightarrow x &\in \{\log_2 2, \log_2 3\} \\ \Leftrightarrow x &\in \{1, \log_2 3\}\end{aligned}$$

Exercice 5.4



$$\tan \widehat{ABD} = \frac{5}{3}$$

$$\Rightarrow \widehat{ABD} = \arctan\left(\frac{5}{3}\right)$$

$$\Rightarrow \widehat{ABD} = \arctan\left(\frac{5}{3}\right)$$

$$\tan \widehat{DAC} = \frac{6}{5}$$

$$\Rightarrow \widehat{DAC} = \arctan\left(\frac{6}{5}\right)$$

$$\Rightarrow \widehat{OAB} = 90 - \arctan\left(\frac{6}{5}\right)$$

$$\widehat{BOA} + \widehat{ABO} + \widehat{OAB} = 180$$

$$\Leftrightarrow \widehat{BOA} = 180 - \widehat{ABO} - \widehat{OAB}$$

$$\Leftrightarrow \widehat{BOA} = 180 - \left(90 - \arctan\left(\frac{6}{5}\right)\right) - \arctan\left(\frac{5}{3}\right)$$

$$\Leftrightarrow \widehat{BOA} = 90 + \arctan\left(\frac{6}{5}\right) - \arctan\left(\frac{5}{3}\right) \approx 81,158$$

Exercice 5.9

(c)

$$\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

(d)

$$\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$$

Exercice 5.12

$$\begin{aligned}\sin \theta &= \frac{7}{16} \\ \cos^2 \theta + \sin^2 \theta &= 1 \\ \Leftrightarrow \cos^2 \theta &= 1 - \sin^2 \theta \\ \Leftrightarrow \cos \theta &= \pm \sqrt{1 - \sin^2 \theta} \\ \Leftrightarrow \cos \theta &= \pm \sqrt{1 - \left(\frac{7}{16}\right)^2} = \pm \frac{\sqrt{207}}{16} = \pm \frac{3\sqrt{23}}{16} \\ \tan \theta &= \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{\frac{7}{16}}{\pm \frac{3\sqrt{23}}{16}} = \pm \frac{7}{16} \times \frac{16}{3\sqrt{23}} = \pm \frac{7\sqrt{23}}{69}\end{aligned}$$