

# MATH-F112

## Correction du TP4

### Géométrie

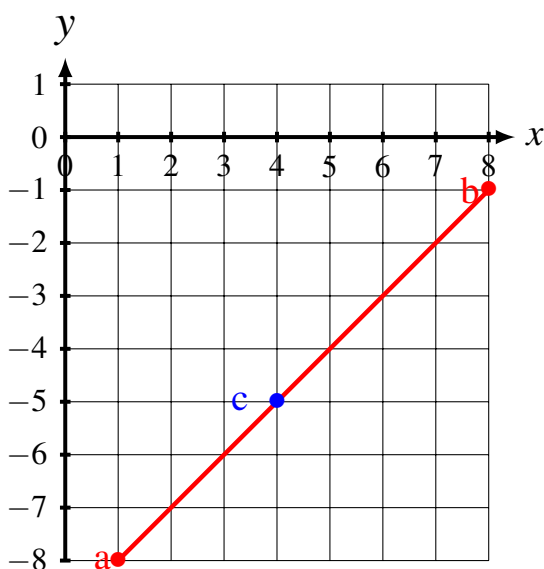
## Exercice 3.3

(b)

$$\begin{aligned}
 \vec{ac} &= \frac{3}{4}\vec{cb} \\
 \Leftrightarrow (x_c, y_c) - (1, -8) &= \frac{3}{4}[(8, -1) - (x_c, y_c)] \\
 \Leftrightarrow (x_c - 1, y_c + 8) &= \frac{3}{4}(8 - x_c, -1 - y_c) \\
 \Leftrightarrow (x_c - 1, y_c + 8) &= \left(6 - \frac{3}{4}x_c, -\frac{3}{4} - \frac{3}{4}y_c\right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} x_c - 1 = 6 - \frac{3}{4}x_c \\ y_c + 8 = -\frac{3}{4} - \frac{3}{4}y_c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{7}{4}x_c = 7 \\ \frac{7}{4}y_c = -\frac{35}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_c = 4 \\ y_c = -5 \end{cases}$$

Les coordonnées du point c sont donc  $c = (4, -5)$ .



**Exercice 3.5**

(b) L'axe  $O_y$  est l'ensemble des points qui vérifient  $x = 0$ .

**Exercice 3.7**

Soit  $P := (P_x, P_y)$  le point d'intersection des droites d'équations

$$3x - 2y + 10 = 0 \quad \text{et} \quad 4x + 3y - 7 = 0.$$

Alors les coordonnées  $P_x$  et  $P_y$  sont telles que,

$$\begin{aligned} & \begin{cases} 3P_x - 2P_y = -10 \\ 4P_x + 3P_y = 7 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} 3P_x - 2P_y = -10 \\ \frac{17}{2}P_x = -8 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} 2P_y = 3P_x + 10 \\ P_x = \frac{-16}{17} \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} P_y = \frac{61}{17} \\ P_x = \frac{-16}{17} \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi, le vecteur  $17 \left( (2, 1) - \left( \frac{-16}{17}, \frac{61}{17} \right) \right) = (50, -44)$  est un vecteur directeur de la droite passant par les points  $(2, 1)$  et  $P$ . Alors, cette dernière a pour équation paramétrique,

$$\begin{cases} x = 2 + 50\lambda \\ y = 1 + (-44)\lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

et son équation cartésienne est donnée par,  $\frac{x-2}{50} = \frac{y-1}{-44}$ , c'est à dire  $44x + 50y - 138 = 0$ .

**Exercice 3.8**

On a  $2x - 3y - 4 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{2}{3}x - \frac{4}{3}$ . Donc la pente de la droite doit être égale à  $-\frac{3}{2}$ . En plus, pour que la droite passe par le point  $(3, -2)$  on doit avoir  $-2 = -\frac{3}{2} \cdot 3 + c \Leftrightarrow c = \frac{5}{2}$  et la droite est donnée par  $y = -\frac{3}{2}x + \frac{5}{2}$ .

**Exercice 3.9**

(e) Le vecteur  $\vec{n} := (1, -1)$  est un vecteur normal à la première bissectrice. Le projeté orthogonal  $Q$  de  $P$  sur la première bissectrice est l'intersection entre la droite passant par  $P$  de vecteur directeur  $\vec{n}$  et la première bissectrice. Donc, on peut écrire  $Q = P + \lambda \vec{n}$  où  $\lambda$  est tel que

$$3 + \lambda = 5 - \lambda.$$

Alors,  $\lambda = 1$  et  $Q = (4, 4)$ . Ainsi, le point symétrique de  $P$  par rapport à la première bissectrice est  $P - 2(P - Q) = (5, 3)$ .

(f) Notons  $D$  la droite d'équation  $x + 2y - 3 = 0$ . Le vecteur  $\vec{n} := (1, 2)$  est un vecteur normal à  $D$ . Le projeté orthogonal  $Q$  de  $P$  sur  $D$  est l'intersection entre la droite passant par  $P$  de vecteur directeur  $\vec{n}$  et  $D$ . Donc, on peut écrire  $Q = P + \lambda \vec{n}$  où  $\lambda$  est tel que

$$\begin{aligned} & 3 + \lambda + 2(5 + 2\lambda) - 3 = 0 \\ \Leftrightarrow & \lambda = -2. \end{aligned}$$

Alors,  $Q = (1, 1)$ . Ainsi, le point symétrique de  $P$  par rapport à  $D$  est  $P - 2(P - Q) = (-1, -3)$ .

**Exercice 3.27**

$$\begin{aligned}
\vec{a} \times \vec{b} &= \begin{bmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - b_3a_1 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a_2(-a_3 - c_3) - a_3(-a_2 - c_2) \\ a_3(-a_1 - c_1) - (-a_3 - c_3)a_1 \\ a_1(-a_2 - c_2) - a_2(-a_1 - c_1) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -a_2a_3 - a_2c_3 + a_3a_2 + a_3c_2 \\ -a_3a_1 - a_3c_1 + a_1a_3 + a_1c_3 \\ -a_1a_2 - a_1c_2 + a_2a_1 + a_2c_1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a_3c_2 - a_2c_3 \\ a_1c_3 - a_3c_1 \\ a_2c_1 - a_1c_2 \end{bmatrix} \\
&= \vec{c} \times \vec{a}.
\end{aligned}$$

De la même manière on a,

$$\begin{aligned}
\vec{c} \times \vec{a} &= \begin{bmatrix} c_2a_3 - c_3a_2 \\ c_3a_1 - c_1a_3 \\ c_1a_2 - c_2a_1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} c_2(-b_3 - c_3) - c_3(-b_2 - c_2) \\ c_3(-b_1 - c_1) - c_1(-b_3 - c_3) \\ c_1(-b_2 - c_2) - c_2(-b_1 - c_1) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -c_2c_3 - c_2b_3 + c_3c_2 + c_3b_2 \\ -c_3c_1 - c_3b_1 + c_1c_3 + c_1b_3 \\ -c_1c_2 - c_1b_2 + c_2c_1 + c_2b_1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} c_3b_2 - c_2b_3 \\ c_1b_3 - c_3b_1 \\ c_2b_1 - c_1b_2 \end{bmatrix} \\
&= \vec{b} \times \vec{c}.
\end{aligned}$$

On aurait aussi pu utiliser l'antisymétrie et la linéarité à gauche du produit vectoriel,

$$\begin{aligned}
\vec{a} \times \vec{b} &= (-\vec{b} - \vec{c}) \times \vec{b} \\
&= -\vec{b} \times \vec{b} - \vec{c} \times \vec{b} \\
&= \vec{b} \times \vec{c}
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\vec{b} \times \vec{c} &= (-\vec{a} - \vec{c}) \times \vec{c} \\
&= -\vec{a} \times \vec{c} - \vec{c} \times \vec{c} \\
&= \vec{c} \times \vec{a}.
\end{aligned}$$

**Exercice 3.31**

- (c) Notons  $P$  le plan contenant l'axe  $O_z$  et passant par le point  $(1, 1, 1)$ . Cherchons une équation de  $P$ . Comme  $P$  passe par l'origine, les vecteurs  $(1, 1, 1)$  et  $(0, 0, 1)$  sont des vecteurs directeurs de  $P$ . On

obtient un vecteur normal  $n$  de  $P$  en faisant leur produit vectoriel,

$$\begin{aligned}\vec{n} &= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Alors les points de  $P$  sont les points  $P = (x, y, z)$  qui vérifient,

$$\begin{aligned}\langle P - 0, \vec{n} \rangle &= 0 \\ \Leftrightarrow x - y &= 0\end{aligned}$$

Donc l'équation cartésienne du plan est  $x - y = 0$ .

### Exercice 3.32

- (b) Le vecteur normal de ce plan est directement donné par  $(3, 7, -6)$  et il reste de résoudre l'équation  $3x + 7y - 6z = c$  pour  $c$  avec le point  $(-1, 2, 4)$  et on obtient  $c = 3 \cdot (-1) + 7 \cdot 2 - 6 \cdot 4 = -13$ . Donc l'équation de la droite est  $3x + 7y - 6z = -13$ .

### Exercice 3.34

- (e) Notons  $D$  la droite parallèle au plan  $P_1$  d'équation  $x + y - 2z = 3$  et contenue dans le plan  $P_2$  d'équation  $2x - y + z = 1$  et qui passe par le point  $(1, 1, 0)$ . Les vecteurs  $\vec{n}_1 = (1, 1, -2)$  et  $\vec{n}_2 = (2, -1, 1)$  sont respectivement des vecteurs normaux à  $P_1$  et  $P_2$ . Le produit vectoriel de ces derniers est

$$\begin{aligned}\vec{d} &= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -1 \\ -5 \\ -3 \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

En particulier, ils sont non colinéaires, donc ils engendrent un plan  $P_3$ . Par définition, la droite  $D$  est orthogonale à  $P_3$ , donc le vecteur  $\vec{d}$  qui est un vecteur normal à  $P_3$  est un vecteur directeur de  $D$ . Ainsi, l'équation paramétrique de  $D$  est donnée par,

$$\begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 1 + 5\lambda \\ z = 3\lambda. \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

En isolant  $\lambda$ , on obtient  $x - 1 = \frac{y-1}{5} = \frac{z}{3}$ . Ce qui nous donne l'équation cartésienne,

$$\begin{cases} 5x - y - 4 = 0 \\ 3x - z - 3 = 0. \end{cases}$$