

MATH-F112
Correction du TP5
Géométrie et fonctions trigonométriques

Exercice 3.39

Dans $\mathbb{R}^3$, la droite d'équations

$$\begin{cases} x = 1 - 4\lambda \\ y = -2 + 3\lambda \\ z = 4 - \lambda \end{cases} \quad (1)$$

est-elle parallèle au plan d'équation $x + 2y + 2z - 6 = 0$?

Une droite est parallèle à un plan si le vecteur directeur de la droite est perpendiculaire au vecteur normal du plan. Rappelons que deux vecteurs sont perpendiculaires si et seulement si leur produit scalaire est nul. Notons $\vec{v}_d$, le vecteur directeur de la droite et $\vec{v}_n$, le vecteur normal du plan. La lecture de l'énoncé permet de déduire

$$\begin{cases} \vec{v}_d = (-4, 3, -1) \\ \vec{v}_n = (1, 2, 2) \end{cases}.$$

Le produit scalaire des deux vecteurs ci-dessus donne :

$$\begin{aligned} \vec{v}_d \cdot \vec{v}_n &= (-4, 3, -1) \cdot (1, 2, 2) \\ \Leftrightarrow \vec{v}_d \cdot \vec{v}_n &= (-4 \cdot 1) + (3 \cdot 2) + (-1 \cdot 2) \\ \Leftrightarrow \vec{v}_d \cdot \vec{v}_n &= -4 + 6 - 2 \\ \Leftrightarrow \vec{v}_d \cdot \vec{v}_n &= 0 \end{aligned}$$

Le produit scalaire de $\vec{v}_d$ et $\vec{v}_n$ étant nul, ces deux vecteurs sont perpendiculaires, ce qui signifie que la droite d'équations paramétriques (1) est bien parallèle au plan d'équation $x + 2y + 2z - 6 = 0$.

Exercice 3.49

(b) Il faut que les vecteurs normaux des deux plans soient proportionnels, c'est-à-dire que

$$\frac{1}{6} = \frac{k}{-2} = \frac{-2}{-12}$$

On tire donc $k = -\frac{1}{3}$

(f) Pour déterminer les coordonnées du point d'intersection il faut résoudre le système :

$$\begin{cases} x = y \\ 2x - y + z = 5 \\ x + y = 2 \end{cases}$$

La première et la troisième équations donnent : $x = y = 1$ et en remplaçant dans la seconde, on obtient $z = 4$, et donc le point d'intersection $(1, 1, 4)$. Les coordonnées de ce point doivent vérifier l'équation du plan, ce qui donne l'équation $1 + k - 8 - 9 = 0$. Et $k = 16$.

Exercice 3.50

(d) L'angle (θ) entre $v_n = (2, -2, 1)$ le vecteur normal du plan α et $\vec{v}_d = (1, 1, 2)$ le vecteur directeur de la droite D_2 , nous donnera l'angle complémentaire à celui recherché.

$$\cos(\theta) = \frac{\langle \vec{v}_n, \vec{v}_d \rangle}{\|\vec{v}_n\| \|\vec{v}_d\|} = \frac{2 \cdot 1 + (-2) \cdot 1 + 1 \cdot 2}{\sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2} \sqrt{1^2 + 1^2 + 2^2}} = \frac{2}{3\sqrt{6}}$$

On obtient $\theta = \arccos\left(\frac{2}{3\sqrt{6}}\right)$ pour l'angle demandé : $\frac{\pi}{2} - \arccos\left(\frac{2}{3\sqrt{6}}\right)$.

Fonctions trigonométriques

Exercice 2.19

- (8) La fonction n'est pas injective car $f(1) = f(2) = 1$. Elle n'est pas non plus surjective car, par exemple, 2 n'a pas de "préimage". N'étant ni injective ni surjective, la fonction n'est pas bijective.
- (10) La fonction est bijective. Montrons qu'elle est injective : si $f(a) = f(b)$ on a $a^3 = b^3$ et donc $a = b$. Elle est également surjective car toutes valeurs a possède une "préimage" égale à $\sqrt[3]{a}$.

Exercice 7.1

(c)

$$\sin^2(x) + \sin(x) - 2 = 0$$

$$\sin(x) = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2}$$

La seule solution possible est $\sin(x) = 1$, ce qui donne comme solution : $\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi | k \in \mathbf{Z}\}$

(d)

$$\sin^2(2x) - \sin^2(x) = 0$$

$$4\sin^2(x)\cos^2(x) - \sin^2(x) = 0$$

$$\sin^2(x)(4\cos^2(x) - 1) = 0$$

Soit $\sin^2(x) = 0$ et donc $x \in \{k\pi | k \in \mathbf{Z}\}$

Soit $4\cos^2(x) - 1 = 0 \Leftrightarrow \cos(x) = \pm \frac{1}{2} \Leftrightarrow x \in \{\frac{\pi}{3} + k\pi, \frac{2\pi}{3} + k\pi | k \in \mathbf{Z}\}$

On obtient la réponse finale : $x \in \{k\pi, \frac{\pi}{3} + k\pi, \frac{2\pi}{3} + k\pi | k \in \mathbf{Z}\}$

(f)

$$\sin(2x) - \cos(2x) = 1$$

$$2\sin(x)\cos(x) - \cos^2(x) + \sin^2(x) = \cos^2(x) + \sin^2(x)$$

$$2\sin(x)\cos(x) - 2\cos^2(x) = 0$$

Soit $\cos(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \{\frac{\pi}{2} + k\pi | k \in \mathbf{Z}\}$

Soit $\sin(x) - \cos(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \{\frac{\pi}{4} + k\pi | k \in \mathbf{Z}\}$

On obtient comme réponse finale : $x \in \{\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{4} + k\pi | k \in \mathbf{Z}\}$

(i)

$$\begin{aligned}
& \arccos(2x) = \arcsin(x) \\
& \Leftrightarrow \sin(\arccos(2x)) = \sin(\arcsin(x)) \\
& \Leftrightarrow \sqrt{1 - (2x)^2} = x \quad (*) \\
& \Leftrightarrow 1 - 4x^2 = x^2 \\
& \Leftrightarrow 5x^2 = 1 \\
& \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{5} \\
& \Leftrightarrow x = +\frac{1}{\sqrt{5}} \quad (\text{la racine négative est à rejeter car } x \text{ est forcément positif cf}(*)) \\
& \Leftrightarrow x = +\frac{\sqrt{5}}{5}
\end{aligned}$$

(a) On a $\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$.

(d) On a

$$\begin{aligned}
& \operatorname{arccotg}(-1) = x \\
& \Leftrightarrow \frac{\cos x}{\sin x} = -1, \quad 0 < x < \pi \\
& \Leftrightarrow \cos x = -\sin x, \quad 0 < x < \pi \\
& \Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{4}
\end{aligned}$$

(f) On sait que l'image de $\arccos$ est donné par $[0, \pi]$ et donc $\sin \arccos \frac{\sqrt{3}}{2} > 0$ et donc

$$\begin{aligned}
& \sin \arccos \frac{\sqrt{3}}{2} = x \\
& \Leftrightarrow \sqrt{1 - \cos^2 \arccos \frac{\sqrt{3}}{2}} = x \\
& \Leftrightarrow \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = x \\
& \Leftrightarrow \sqrt{1 - \frac{3}{4}} = x \\
& \Leftrightarrow \frac{1}{2} = x.
\end{aligned}$$

(h) On a $\operatorname{cosec}\left(\arcsin \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\sin \arcsin \frac{1}{2}} = \frac{1}{1/2} = 2$.**Exercice 7.3**(d) On calcule pour tout $x \in \left[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right]$

$$\begin{aligned}
\sin(2 \arccos 4x) &= 2 \sin(\arccos 4x) \cos(\arccos 4x) \\
&= 2 \sqrt{1 - \cos^2(\arccos 4x)} 4x \\
&= 2 \sqrt{1 - (4x)^2} 4x
\end{aligned}$$

- (e) On regarde un triangle avec les points $(0,0)$, $(1,0)$ et $(1,x)$. L'angle à l'origine est donnée par $\arctan \frac{x}{1}$. Donc

$$\sin \arctan x = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Exercice 7.4

- (a) La domaine est donnée par $\mathbb{R}$.
 (e) $\arccos$ est défini sur $[-1, 1]$ est $\sin$ sur $\mathbb{R}$ donc la domaine est $[-3, 3]$.
 (f) $\arccos$ est défini sur $[-1, 1]$, donc $\arccos \frac{2x}{x+1}$ est bien défini si et seulement si

$$-1 \leq \frac{2x}{x+1} \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq \frac{3x+1}{x+1} \text{ et } \frac{x-1}{x+1} \leq 0$$

ce qui nous amène à la domaine $[-1/3, 1]$.

- (h) $\arcsin$ est défini sur $[-1, 1]$ et $\cotg$ est défini sur $\mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$, donc $\arcsin \cotg 3x$ est bien défini si et seulement si

$$\left| \frac{\cos 3x}{\sin 3x} \right| \leq 1 \Leftrightarrow |\cos 3x| \leq |\sin 3x|$$

Donc la domaine est donné par (regardez le cercle trigonometrique) :

$$\left\{ \left[\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{3}, \frac{3\pi}{12} + \frac{k\pi}{3} \right] \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$$