

MATH-F112
Correction du TP6
Limites

Exercice 6.4

(b)

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x^3 + 3x - 4}{x^2 + x - 1} = \frac{2(-2)^3 + 3(-2) - 4}{(-2)^2 - 2 - 1} = \frac{-26}{1} = -26$$

Remarque : Le point $(-2, -26)$ appartient au graphe de la fonction.

$$f : \text{Dom} f \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \rightarrow \frac{2x^3 + 3x - 4}{x^2 + x - 1}$$

(d) Rappel :

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + b^2 + ab)$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x - 2} &= \frac{0}{0} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x^2 + 4 + 2x)}{(x - 2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} x^2 + 4 + 2x \\ &= 12 \end{aligned}$$

Remarque : Le graphe de la fonction :

$$f : \text{Dom} f \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \rightarrow \frac{x^3 - 8}{x - 2}$$

possède un trou/un point creux en $(2, 12)$.

(g)

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+4}-2}{x} &= \frac{0}{0} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+4}-2}{x} \cdot \frac{\sqrt{x+4}+2}{\sqrt{x+4}+2} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+4-4}{x(\sqrt{x+4}+2)} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x+4}+2} \\
&= \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

Remarque : Le graphe de la fonction :

$$f : \text{Dom} f \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \rightarrow \frac{\sqrt{x+4}-2}{x}$$

possède un trou/un point creux en $(0, 1/4)$.

(h)

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{2x+1}-3}{x-4} &= \frac{0}{0} \\
&= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{2x+1}-3}{x-4} \cdot \frac{\sqrt{2x+1}+3}{\sqrt{2x+1}+3} \\
&= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{2x+1-9}{(x-4)(\sqrt{2x+1}+3)} \\
&= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{2x-8}{(x-4)(\sqrt{2x+1}+3)} \\
&= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{2(x-4)}{(x-4)(\sqrt{2x+1}+3)} \\
&= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{2}{\sqrt{2x+1}+3} \\
&= \frac{2}{6} = \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

Remarque : Le graphe de la fonction :

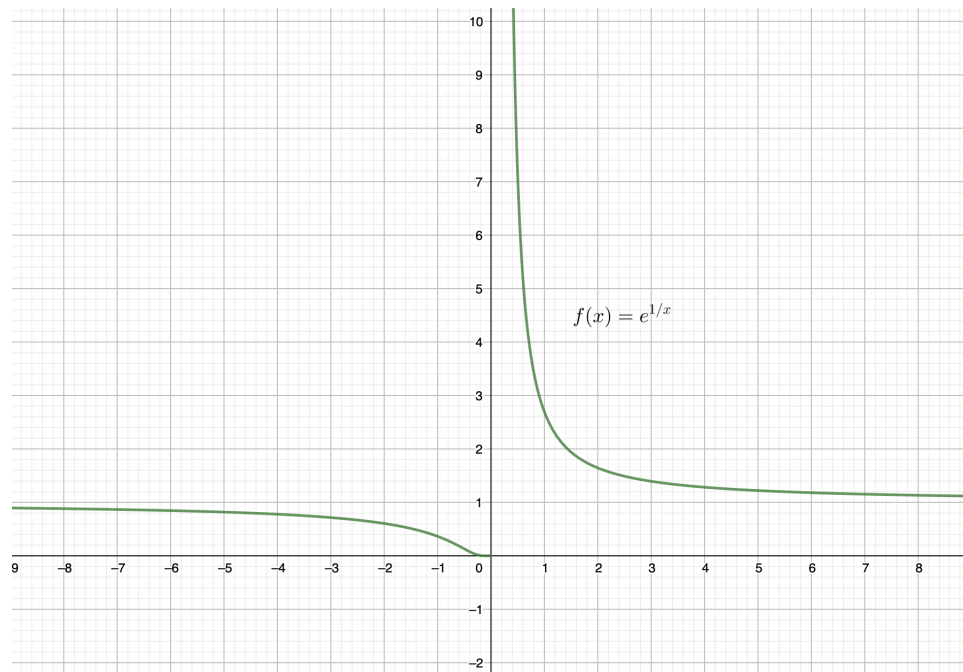
$$f : \text{Dom} f \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \rightarrow \frac{\sqrt{2x+1}-3}{x-4}$$

possède un trou/un point creux en $(4, 1/3)$.

Exercice 6.5

(b)

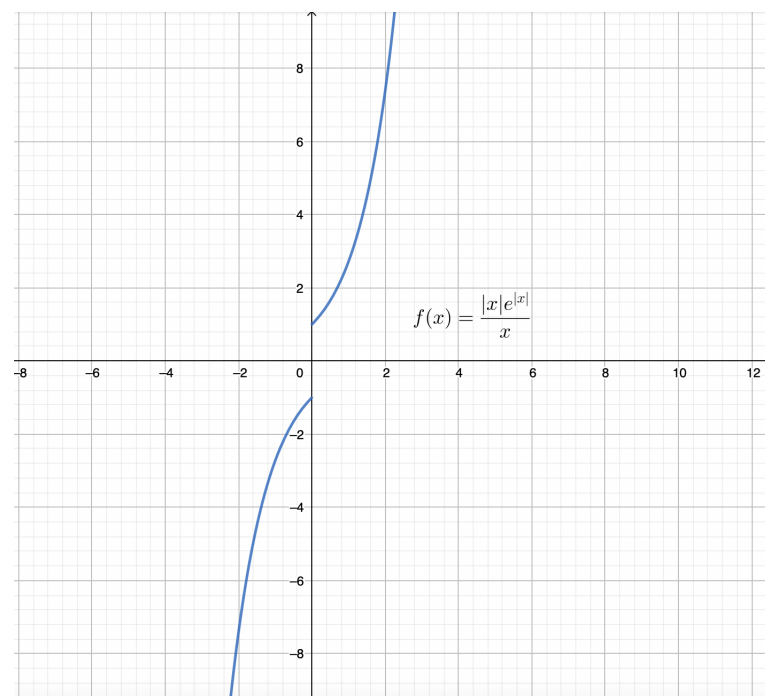
$$\begin{aligned}
\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} e^{1/x} &= e^{+\infty} = +\infty \\
\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} e^{1/x} &= e^{-\infty} = 0
\end{aligned}$$



(c)

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{|x|e^{|x|}}{x} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{xe^x}{x} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} e^x = 1$$

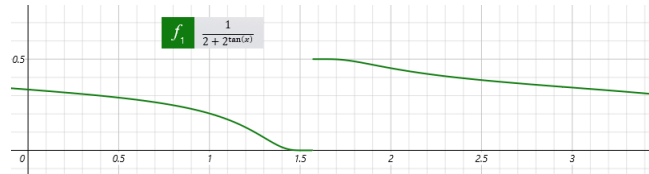
$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{|x|e^{|x|}}{x} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{-xe^{-x}}{x} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} -e^{-x} = -1$$



Exercise 6.8

$$\lim_{\substack{x \rightarrow \pi/2 \\ x < \pi/2}} \frac{1}{2 + 2^{\tan x}} = \frac{1}{2 + 2^{+\infty}} = \frac{1}{2 + (+\infty)} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow \pi/2 \\ x > \pi/2}} \frac{1}{2 + 2^{\tan x}} = \frac{1}{2 + 2^{-\infty}} = \frac{1}{2 + 0} = \frac{1}{2}$$

**Exercise 6.10**

(b)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} 2x^5 + 3x^4 - 6x^2 + x &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^5 \left(2 + \frac{3}{x} - \frac{6}{x^3} + \frac{1}{x^4} \right) \\ &= (\pm\infty)^5 \left(2 + \frac{3}{\pm\infty} - \frac{6}{(\pm\infty)^3} + \frac{1}{(\pm\infty)^4} \right) \\ &= \pm\infty \cdot (2 + 0 - 0 + 0) \\ &= \pm\infty \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3 - 4}{x^2 - 6x + 8} &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3 \left(1 - \frac{4}{x^3} \right)}{x^2 \left(1 - \frac{6}{x} + \frac{8}{x^2} \right)} \\ &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x \left(1 - \frac{4}{x^3} \right)}{\left(1 - \frac{6}{x} + \frac{8}{x^2} \right)} \\ &= \pm\infty \cdot \frac{(1 - 0)}{(1 - 0 + 0)} \\ &= \pm\infty \end{aligned}$$

(f)

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3 - 3x + 1}{2x^3 - 6x^2 + x} &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3 \left(1 - \frac{3}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right)}{x^3 \left(2 - \frac{6}{x} + \frac{1}{x^2}\right)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\left(1 - \frac{3}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right)}{\left(2 - \frac{6}{x} + \frac{1}{x^2}\right)} \\
 &= \frac{(1 - 0 + 0)}{(2 - 0 + 0)} \\
 &= \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

(g)

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\sqrt{x^2 + x}}{2x + 1} &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\sqrt{x^2}}{2x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{|x|}{2x} \\
 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|x|}{2x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{2x} = 1/2 \\
 \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x|}{2x} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} -\frac{x}{2x} = -1/2
 \end{aligned}$$

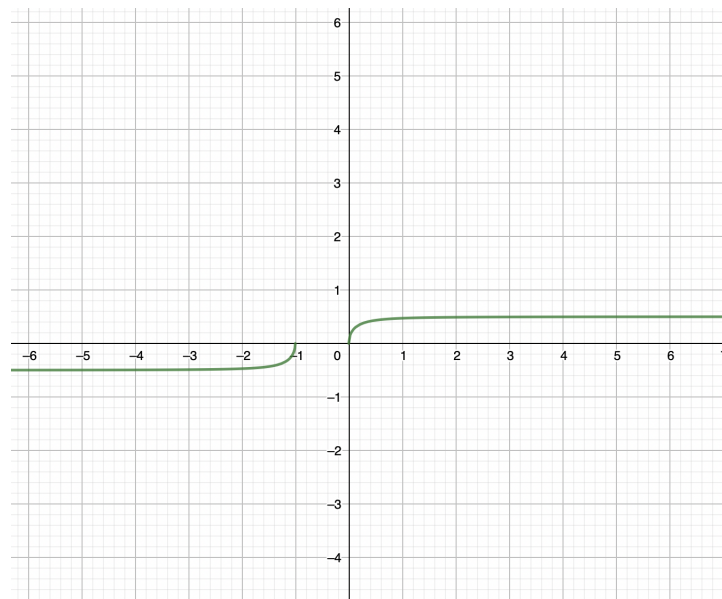
Remarque :

La fonction :

$$f : \text{Dom} f \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \frac{\sqrt{x^2 + x}}{2x + 1}$$

possède deux asymptotes horizontales d'équations :

$$AH \equiv y = \pm 1/2$$



(h)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3\sqrt{8x^3-1}}{x+4} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{3\sqrt{8x^3-1}}{x}}{\frac{x+4}{x}} = +\infty$$

La limite $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3\sqrt{8x^3-1}}{x+4}$ n'a pas de sens car le domaine de la fonction est $[1/2, +\infty[$

(k)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x(\sqrt{x^2+1}-x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x(\sqrt{x^2+1}-x) \frac{(\sqrt{x^2+1}+x)}{(\sqrt{x^2+1}+x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x(x^2+1-x^2)}{(\sqrt{x^2+1}+x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{(\sqrt{x^2+1}+x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{(|x|+x)} \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{(|x|+x)} = 1/2$$

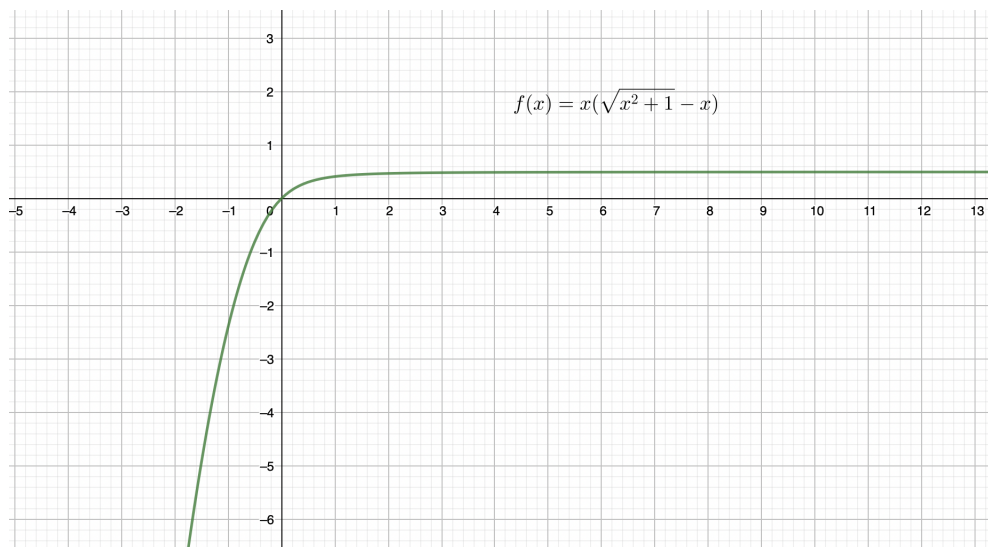
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{(|x|+x)} = -\infty$$

Remarque : La fonction :

$$f : \text{Dom} f \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \rightarrow x(\sqrt{x^2+1}-x)$$

possède une asymptote horizontale à droite d'équation :

$$AH \equiv y = 1/2$$



Exercice 6.11

(b)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x}{3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{7}{3} \cdot \frac{\sin 7x}{7x} = \frac{7}{3}$$

(d)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \sin 4x}{2x - \sin 7x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{2x - \sin 7x} + \frac{\sin 4x}{2x - \sin 7x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2 - \frac{\sin 7x}{x}} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin 4x}{28x}}{\frac{2x}{28x} - \frac{\sin 7x}{28x}} \\ &= \frac{1}{2 - \frac{7}{7x}} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin 4x}{4x \cdot 7}}{\frac{2x}{28x} - \frac{\sin 7x}{4 \cdot 7x}} \\ &= \frac{1}{2 - 1} + \frac{1}{\frac{1}{14} - \frac{1}{4}} \\ &= -\frac{1}{5} + \frac{\frac{28}{28}}{\frac{28}{28} - \frac{7}{28}} = -\frac{1}{5} - \frac{4}{5} = -1 \end{aligned}$$

(e)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{3 - \sin 2x} - \sqrt{3 + \sin 2x}}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{3 - \sin 2x} - \sqrt{3 + \sin 2x}}{x} \cdot \frac{\sqrt{3 - \sin 2x} + \sqrt{3 + \sin 2x}}{\sqrt{3 - \sin 2x} + \sqrt{3 + \sin 2x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 - \sin 2x - (3 + \sin 2x)}{x(\sqrt{3 - \sin 2x} + \sqrt{3 + \sin 2x})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \sin 2x}{x(\sqrt{3 - \sin 2x} + \sqrt{3 + \sin 2x})} \cdot \frac{2}{2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{2x} \cdot \frac{-4}{\sqrt{3 - \sin 2x} + \sqrt{3 + \sin 2x}} \\ &= 1 \cdot \frac{-4}{2\sqrt{3}} \\ &= \frac{-2\sqrt{3}}{3} \end{aligned}$$

Exercice 6.12

$$(c) f(x) = \frac{1 - 2x}{3x + 4}$$

$$\text{Dom} f = \mathbb{R} \setminus \{-4/3\}$$

Le seul point adhérent au domaine est $x = -4/3$ On calcule la limite :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow -4/3 \\ x > -4/3}} \frac{1 - 2x}{3x + 4} = \frac{11/3}{0} = +\infty$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow -4/3 \\ x < -4/3}} \frac{1 - 2x}{3x + 4} = \frac{11/3}{0} = -\infty$$

Il y'a une asymptote verticale d'équation :

$$AV \equiv x = -4/3$$

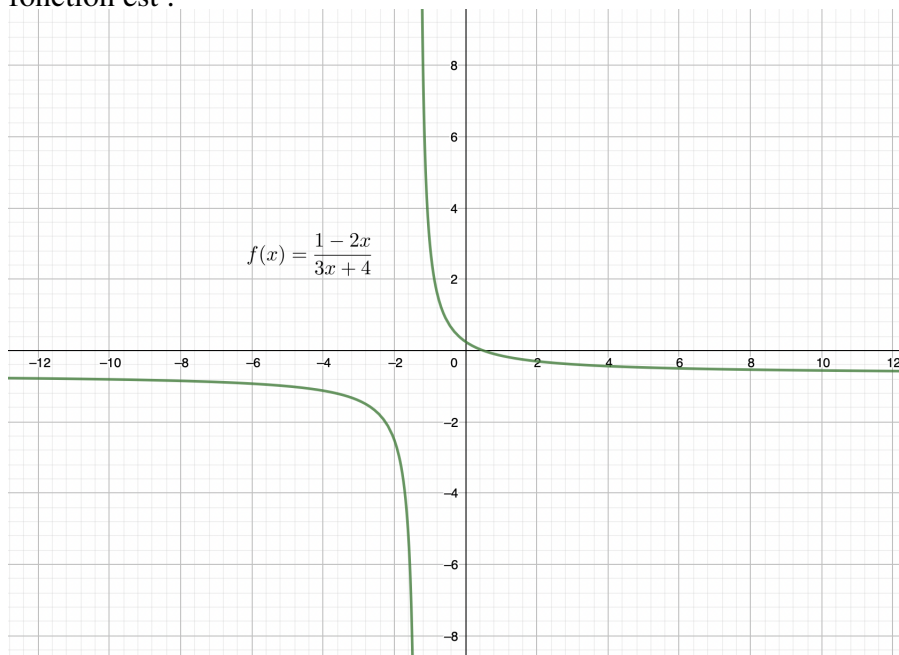
On calcule ensuite les limites :

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1-2x}{3x+4} = -\frac{2}{3}$$

On a donc une asymptote horizontale :

$$AH \equiv y = -\frac{2}{3}$$

Comme il y'a une assyptote horizontale, il n'y a pas d'assyptote oblique. Le graphe de la fonction est :



(g)

$$f(x) = \sqrt{9x^2 - x + 4}$$

$\text{Dom} f = \mathbb{R}$. Il n'y a donc pas d'asymptote verticale car le domaine de la fonction contient tous ses points adhérents.

Calculons ensuite les limites :

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sqrt{9x^2 - x + 4} = +\infty$$

Il n'y a donc pas d'asymptote horizontale.

Calculons ensuite la limite :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\sqrt{9x^2 - x + 4}}{x} &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3|x|}{x} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3|x|}{x} &= 3 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3|x|}{x} &= -3 \end{aligned}$$

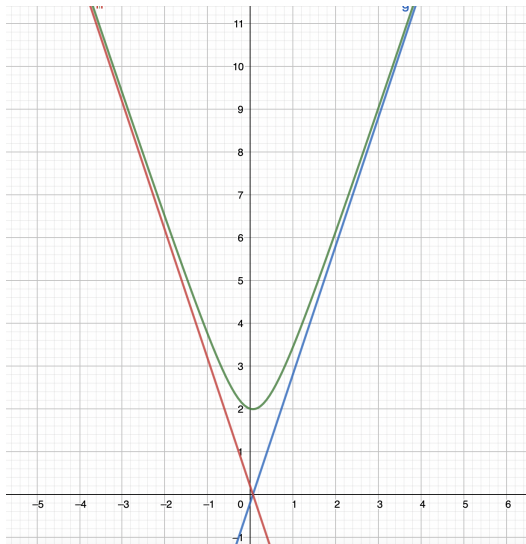
Le graphe de la fonction possède donc deux asymptotes obliques. On trouve les ordonnées à l'origine des deux droites en calculant les limites :

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{9x^2 - x + 4} - 3x &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{9x^2 - x + 4} - 3x) \cdot \frac{(\sqrt{9x^2 - x + 4} + 3x)}{(\sqrt{9x^2 - x + 4} + 3x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x + 4}{\sqrt{9x^2 - x + 4} + 3x} = -\frac{1}{6} \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{9x^2 - x + 4} + 3x &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{9x^2 - x + 4} + 3x) \cdot \frac{(\sqrt{9x^2 - x + 4} - 3x)}{(\sqrt{9x^2 - x + 4} - 3x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x + 4}{\sqrt{9x^2 - x + 4} - 3x} = +\frac{1}{6}\end{aligned}$$

Le graphe de la fonction possède deux asymptotes obliques d'équation :

$$AO \equiv y = \pm 3x \pm \frac{1}{6}$$

Le graphe de la fonction est :



(h)

$$y = x - 2 + \frac{x^2}{x^2 + 9}$$

$$\text{Dom } f = \mathbb{R}$$

Il n'y a donc pas d'asymptote verticale.

Il n'y a pas d'asymptote horizontale car :

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} x - 2 + \frac{x^2}{x^2 + 9} = \pm\infty$$

Calculons la limite :

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x - 2 + \frac{x^2}{x^2 + 9}}{x} = 1$$

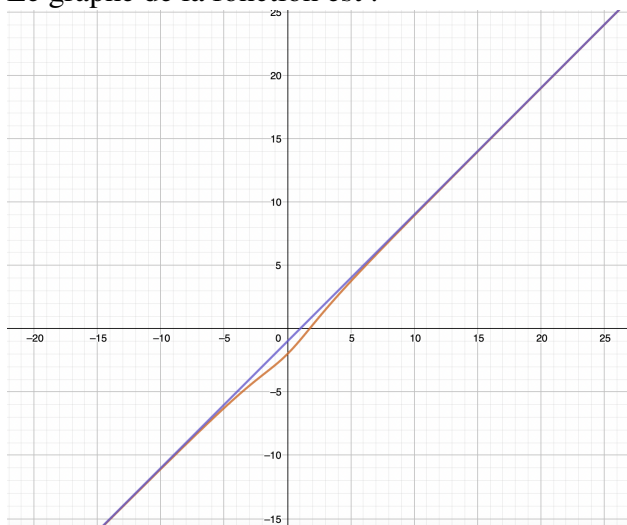
Il y'a donc une asymptote oblique, on trouve l'ordonnée à l'origine de la droite en calculant la limite

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} x - 2 + \frac{x^2}{x^2 + 9} - x = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} -2 + \frac{x^2}{x^2 + 9} = -2 + 1 = -1$$

La fonction possède une asymptote oblique d'équation :

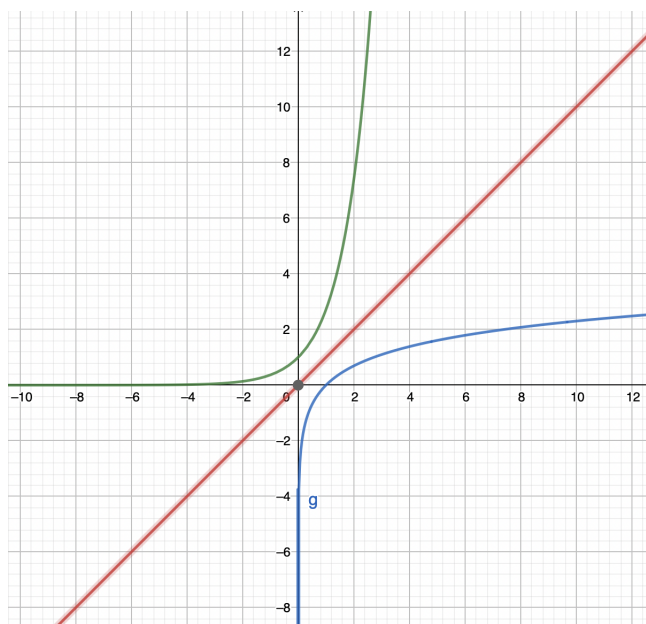
$$y = x - 1$$

Le graphe de la fonction est :



Exercice 6.13

- (a) Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_0^+ : x \rightarrow e^x$. La réciproque de la fonction f est la fonction $g : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R} : x \rightarrow \ln(x)$



- (c) La fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \rightarrow x$ est sa propre réciproque.

Exercice 6.15

6.15. Soit la fonction f donnée par

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x} & \text{pour } x < 1, \\ 3 & \text{pour } x = 1, \\ \frac{1}{2}x + 1 & \text{pour } 1 < x \leq 2, \\ 2 - (x-2)^2 & \text{pour } 2 < x. \end{cases}$$

- Calculer $f(-2)$, $f(0)$, $f\left(\frac{3}{2}\right)$, $f(3)$.
- Tracer le graphe de f .
- Déterminer le plus grand domaine de définition et l'image de f .
- Calculer les limites à gauche et à droite de f en 0, en 1 et en 2.
- En quels points f est-elle continue ?

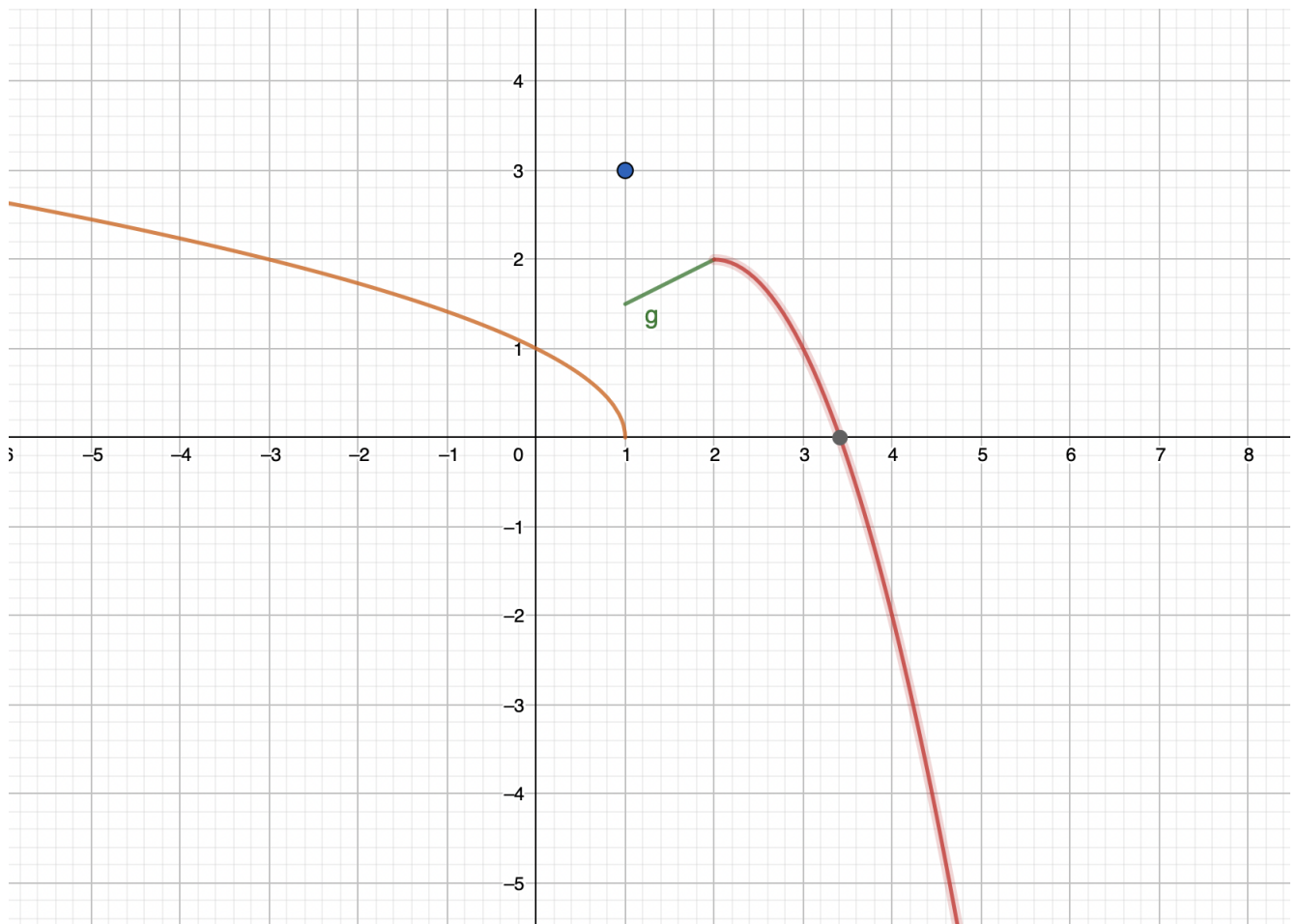
(a)

$$f(-2) = \sqrt{1 - (-2)} = \sqrt{3}$$

$$f(0) = \sqrt{1 - 0} = 1$$

$$f(3/2) = \frac{3}{2} + 1 = \frac{7}{2}$$

$$f(3) = 2 - (3 - 2)^2 = 1$$



(b)

(c) Le plus grand domaine de g est $\mathbb{R}$ et l'ensemble des images est $\mathbb{R}$ également.

(d)

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{1-x} = 1$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{1-x} = 0$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{2}x + 1 = \frac{3}{2}$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{2}x + 1 = 2$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} 2 - (x-2)^2 = 2$$

(e) f est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$