

MATH-F112

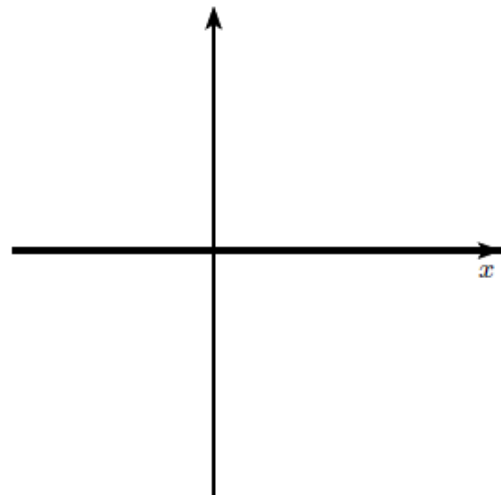
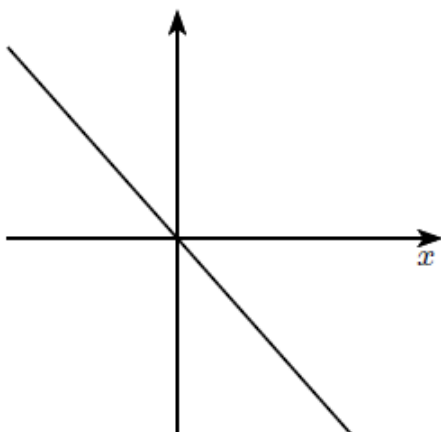
Correction du TP7

Fonctions dérivables

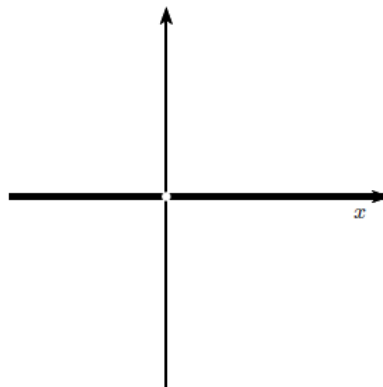
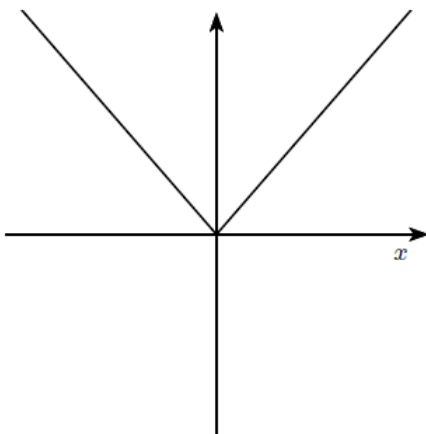
Fonctions dérivables

Exercice 9.3

- Pour le graphe de la première fonction, il s'agit d'une droite, donc la fonction est dérivable partout (par exemple $f(x) = -x$). La dérivée est constante, et ainsi la dérivée seconde est nulle. D'où il s'agit du graphe suivant.

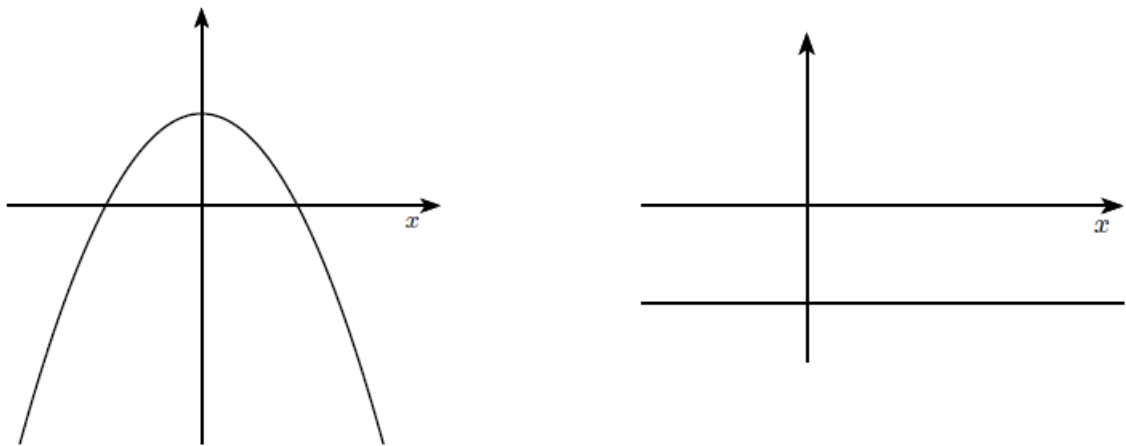


- Le deuxième graphe est composé de deux demi-droites (par exemple $f(x) = |x|$). Donc la dérivée est constante sur chacune des demi-droites, et la fonction n'est pas dérivable en 0. D'où la dérivée seconde est nulle partout, sauf en 0 où elle n'est pas définie.



- Le troisième graphe est une parabole (par exemple $f(x) = -x^2 + 1$). La dérivée est donc une droite,

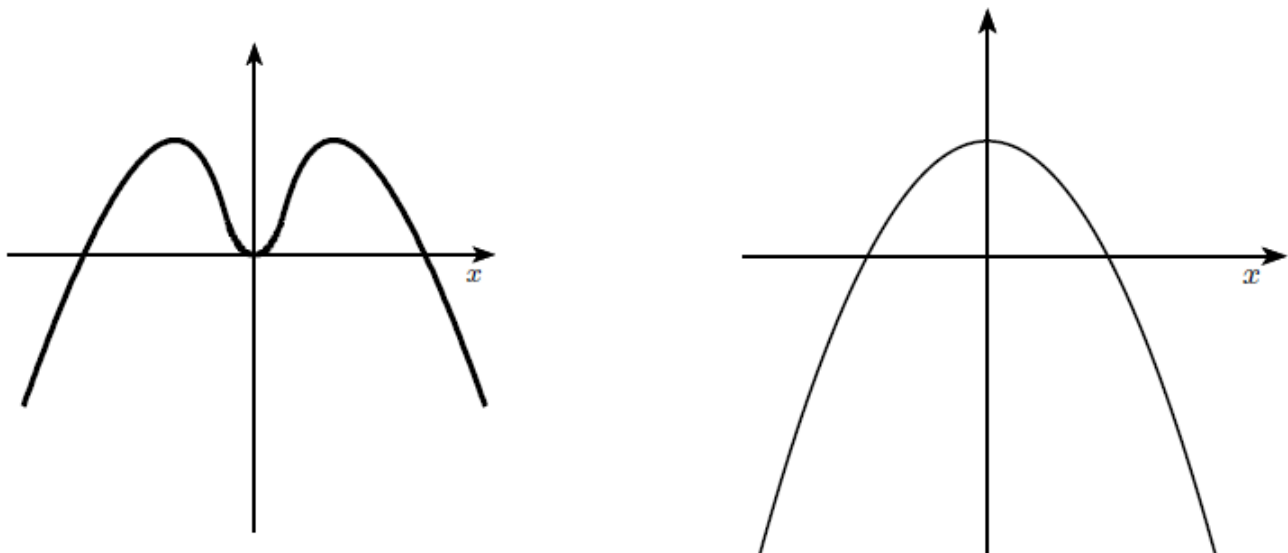
positive sur $] - \infty, 0[$ et négative sur $]0, +\infty[$, donc la dérivée est décroissante. La dérivée seconde est donc constante négative.



— Pour les deux derniers graphes, on va faire un tableau de variation. Pour le quatrième graphe, on a le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$	a	0	b	$+\infty$		
$f(x)$	$-\infty$ $f(a)$ 0 $f(b)$ $-\infty$						
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$

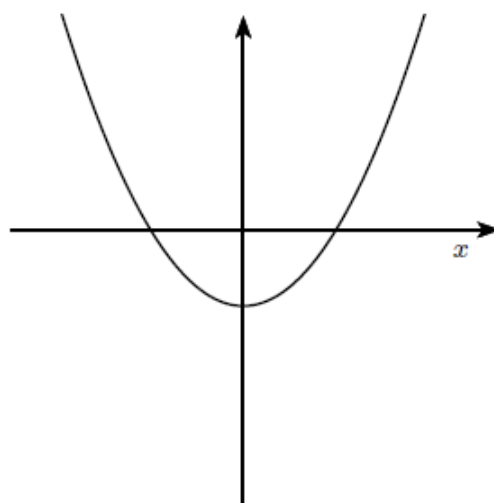
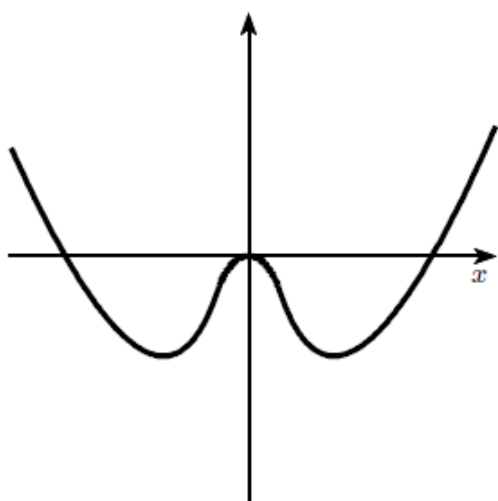
Grâce au tableau de signes de f' , on peut maintenant déterminer ses variations, et le signe de f'' . Ainsi, puisque f' est d'abord positive puis négative, elle est décroissante et donc f'' est négative. Ensuite f' retourne dans les positifs, donc elle est devinet croissante, et f'' devient positive. Enfin, f' décroît vers les négatifs, et donc f'' est négative, ce qui nous donne le graphe suivant.



— Pour le dernier graphe, il suffit de raisonner de la même manière.

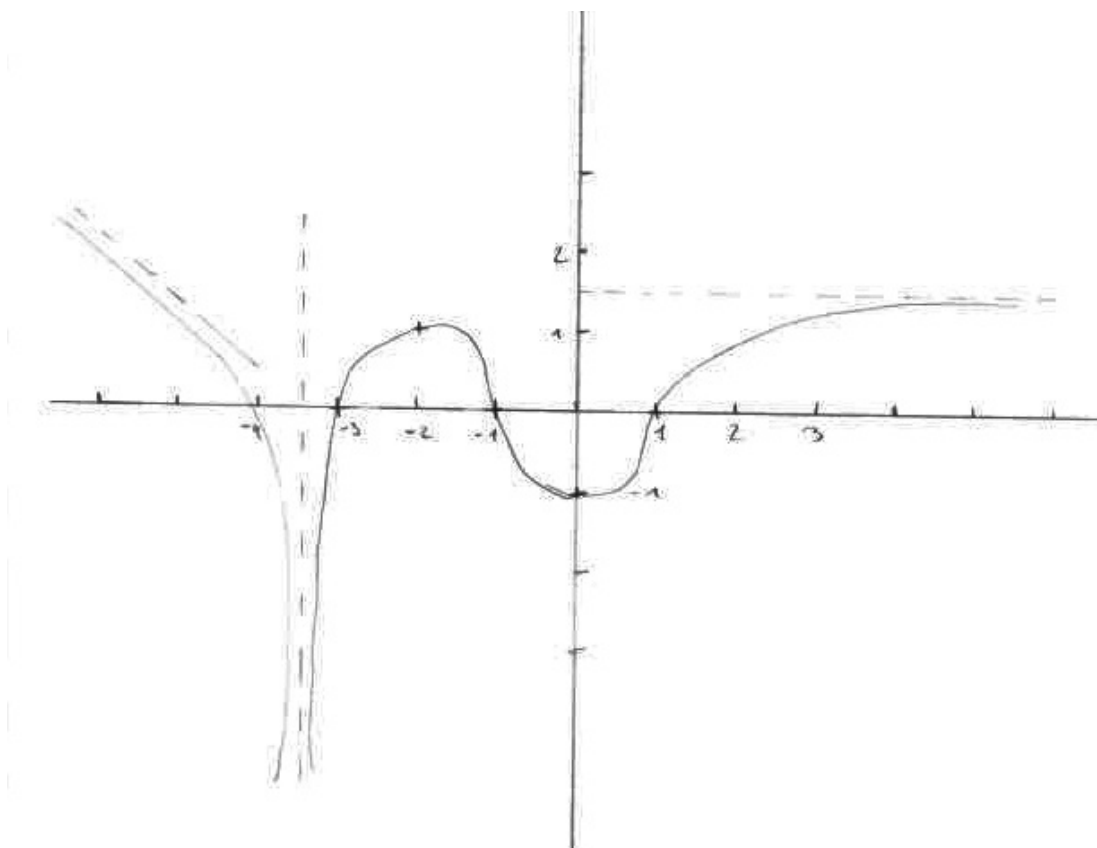
x	$-\infty$	a	0	b	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$f(a)$	0	$f(b)$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

On peut aussi voir que le dernier graphe est le symétrique du quatrième par rapport à l'axe des abscisses, donc il représente la fonction opposée à la fonction du quatrième graphe. Ses dérivées successives seront aussi les opposées. En particulier, le graphe de la dérivée seconde sera le symétrique de la dérivée seconde du précédent par rapport à l'axe des abscisses.

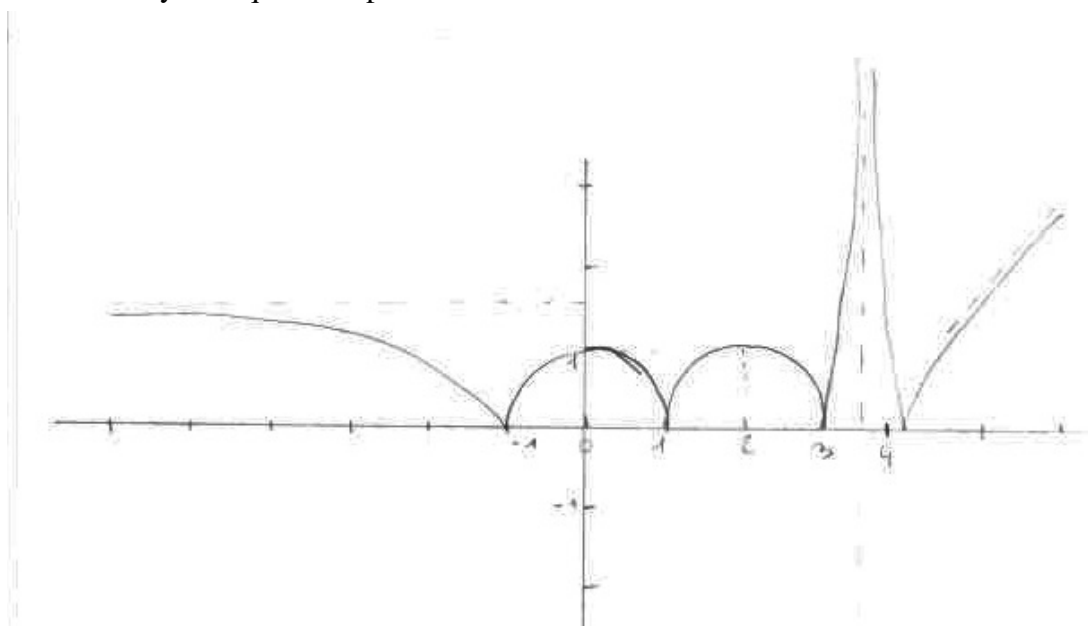


Exercice 9.7

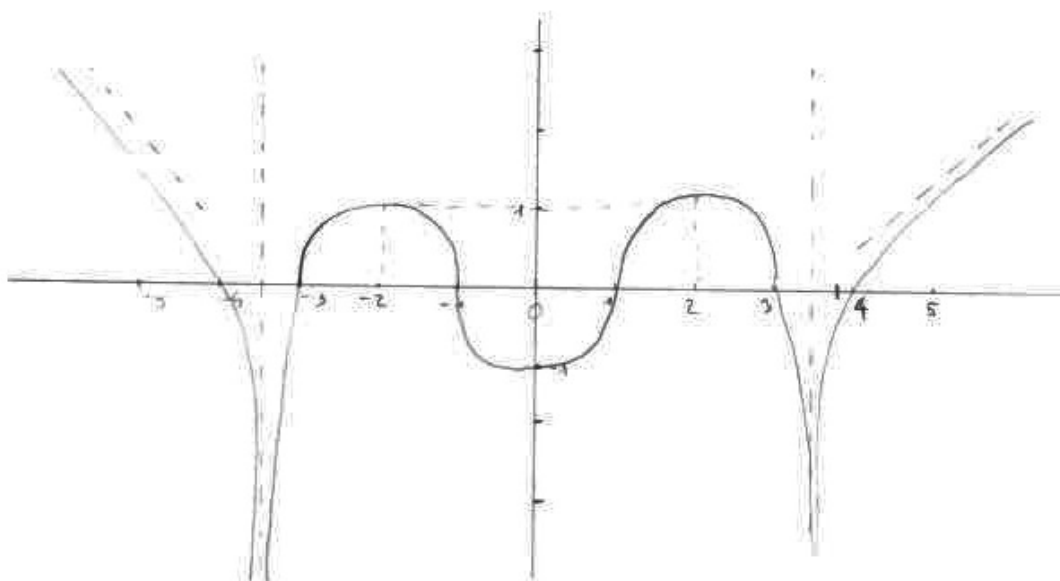
- a) Pour tracer le graphe de $f(-x)$, il suffit de tracer le symétrique du graphe de f par rapport à l'axe des ordonnées.



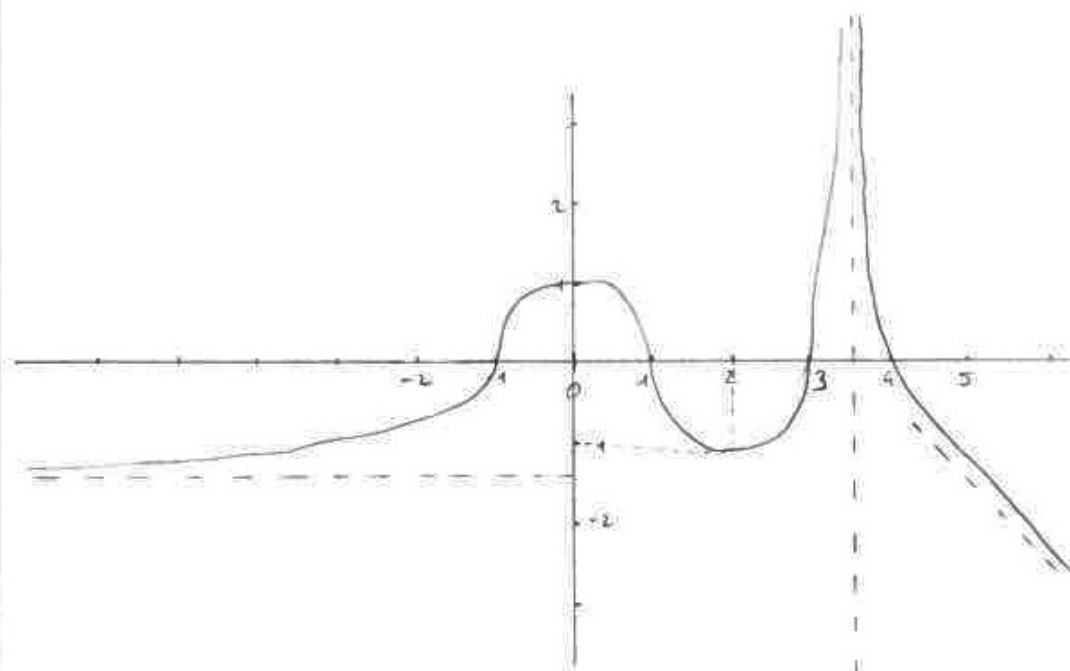
- b) Pour tracer le graphe de $|f(x)|$, on garde la partie du graphe "au-dessus" de l'axe des abscisses, et on trace le symétrique de la partie "en-dessous".



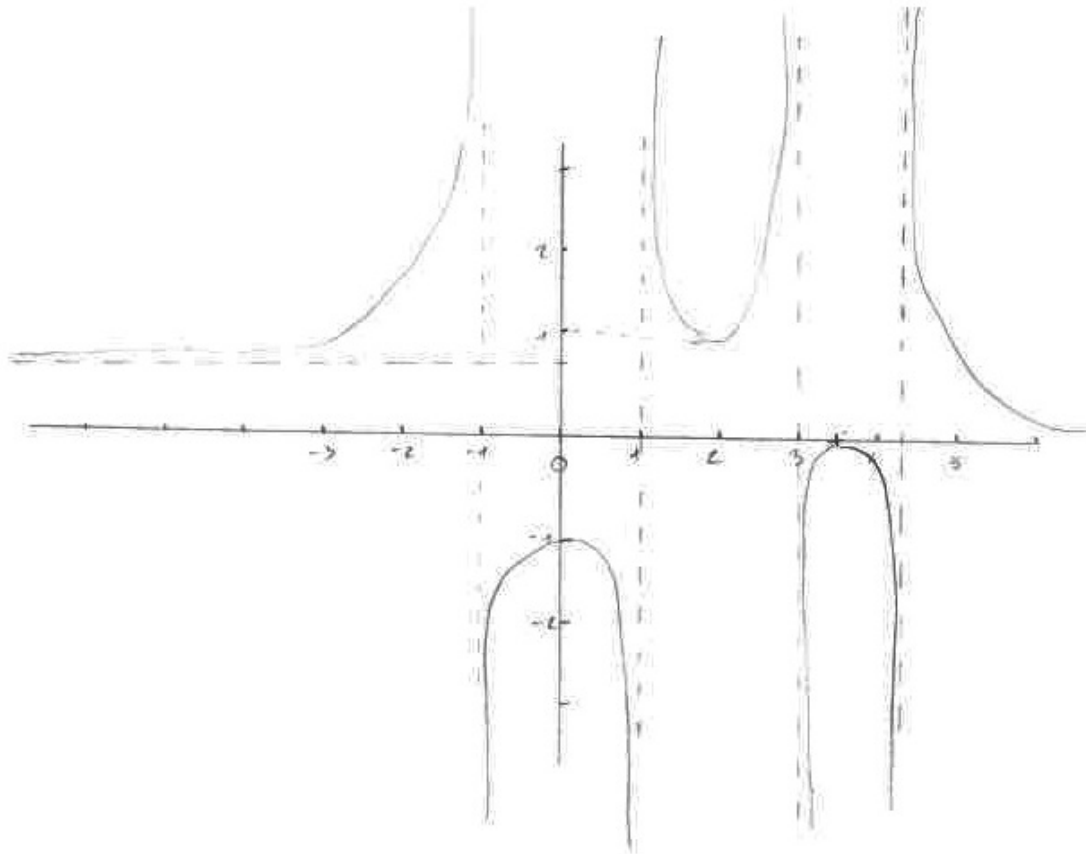
- c) Pour tracer le graphe de $f(|x|)$, on garde la partie du graphe où $x \geq 0$, à droite de l'axe des ordonnées, et on trace à gauche le symétrique de cette partie par rapport à l'axe des ordonnées.



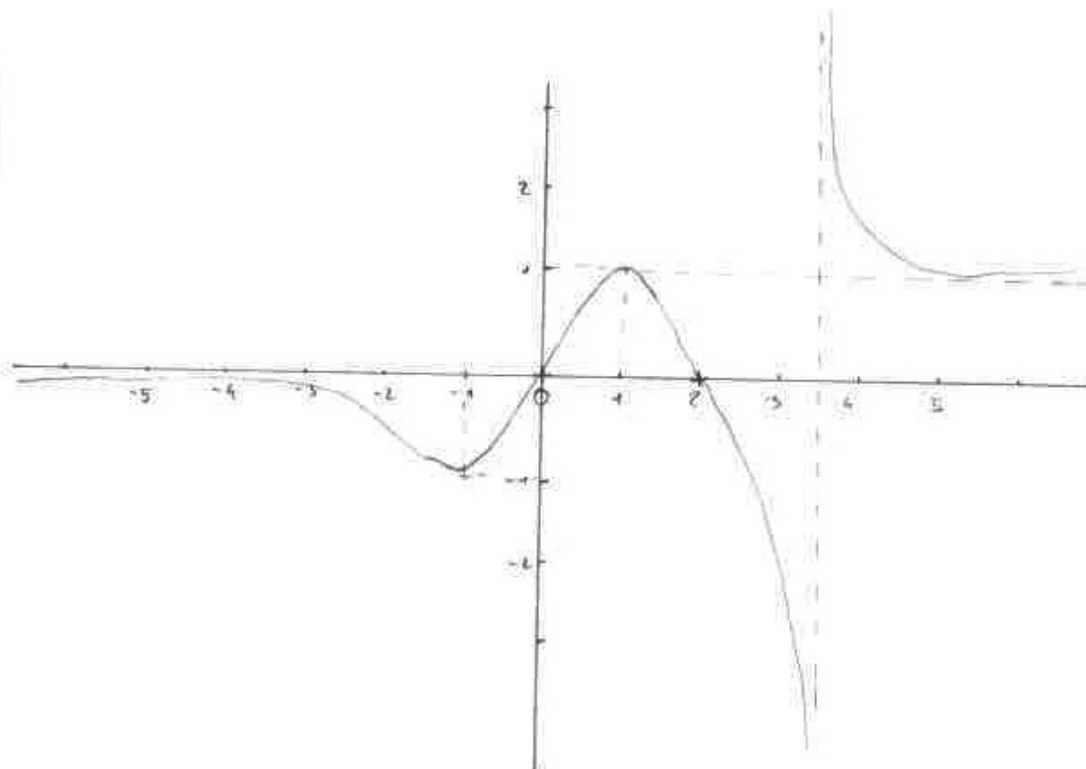
- d) Pour tracer le graphe de $-f(x)$, on trace le symétrique du graphe de f par rapport à l'axe des abscisses.



- e) Pour tracer le graphe de $\frac{1}{f(x)}$, il faut faire attention aux asymptotes de f , ainsi que les points où f s'annule, qui deviennent les lieux d'asymptotes verticales pour $\frac{1}{f}$.



- f) Enfin, pour tracer le graphe de f' , on regarde attentivement les variations de f , et on s'aide des points où les tangentes au graphe de f sont horizontales, c'est-à-dire où la dérivée s'annule.



Exercice 9.10

a)

$$y(x) = x^6 - 3x^4 + 19x^3 - 8x + 4$$

$$y'(x) = 6x^5 - 12x^3 + 57x^2 - 8$$

b) On rappelle que la dérivée d'un quotient est : $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$

$$y(x) = \frac{x^8}{8(1-x^2)^4}$$

$$y'(x) = \frac{8x^7(8(1-x^2)^4) - x^8(8(-2x)4(1-x^2)^3)}{64(1-x^2)^8}$$

$$y'(x) = \frac{64x^7(1-x^2) + 64x^9}{64(1-x^2)^5}$$

$$y'(x) = \frac{x^7}{(1-x^2)^5}$$

d)

$$y(x) = \frac{x(3x+2x^2)}{3\sqrt{(1+x^2)^3}}$$

On a :

$$(x(3x+2x^2))' = 3x + 2x^2 + x(3+4x) = 6x + 6x^2$$

$$\left(3\sqrt{(1+x^2)^3}\right)' = 3 \frac{2x(1+x^2)^2}{2\sqrt{(1+x^2)^3}} = 9x\sqrt{(1+x^2)}$$

D'où on obtient, pour le calcul de $y'(x)$:

$$y'(x) = \frac{(6x + 6x^2)3\sqrt{(1+x^2)^3} - x(3x+2x^2)9x\sqrt{(1+x^2)}}{9(1+x^2)^3}$$

$$y'(x) = \frac{18x(1+x^2)^2 - 9x^2(3x+2x^2)}{9\sqrt{(1+x^2)}(1+x^2)^2}$$

$$y'(x) = \frac{2x}{\sqrt{(1+x^2)}} - \frac{x^2(3x+2x^2)}{\sqrt{(1+x^2)}(1+x^2)^2}$$

h)

$$y(x) = (2-x)(1-5x)$$

$$y'(x) = -1(1-5x) + (2-x)(-5) = -1 + 5x - 10 + 5x = 10x - 11$$

j)

$$\begin{aligned}
 y(x) &= \frac{1}{8}(1+x^3)^{\frac{8}{3}} - \frac{1}{5}(1+x^3)^{\frac{5}{3}} \\
 y'(x) &= \frac{1}{8} \frac{8}{3} (3x^2)(1+x^3)^{\frac{5}{3}} - \frac{1}{5} \frac{5}{3} (3x^2)(1+x^3)^{\frac{2}{3}} \\
 y'(x) &= x^2(1+x^3)^{\frac{5}{3}} - x^2(1+x^3)^{\frac{2}{3}} \\
 y'(x) &= x^2(1+x^3)^{\frac{2}{3}}((1+x^3) - 1) \\
 y'(x) &= x^5(1+x^3)^{\frac{2}{3}}
 \end{aligned}$$

k)

$$\begin{aligned}
 y(x) &= \frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}} \\
 y'(x) &= \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(1-\sqrt{x}) - (1+\sqrt{x})\frac{-1}{2\sqrt{x}}}{(1-\sqrt{x})^2} \\
 y'(x) &= \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{2}}{(1-\sqrt{x})^2} \\
 y'(x) &= \frac{1}{\sqrt{x}(1-\sqrt{x})^2}
 \end{aligned}$$

Exercice 9.11

(c) • Dérivée première

$$\begin{aligned}
 y'(x) &= \left[x + \frac{1}{x} \right]' \\
 \Leftrightarrow y'(x) &= 1 - \frac{1}{x^2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 y'\left(\frac{1}{2}\right) &= 1 - \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} \\
 \Leftrightarrow y'\left(\frac{1}{2}\right) &= 1 - 4 \\
 \Leftrightarrow y'\left(\frac{1}{2}\right) &= -3
 \end{aligned}$$

• Dérivée seconde

$$\begin{aligned}
 y''(x) &= \left[1 - \frac{1}{x^2} \right]' \\
 \Leftrightarrow y''(x) &= -[x^{-2}]' \\
 \Leftrightarrow y''(x) &= 2x^{-3}
 \end{aligned}$$

$$y''\left(\frac{1}{2}\right) = 2\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$$

$$\Leftrightarrow y''\left(\frac{1}{2}\right) = 16$$

- Dérivée troisième

$$y'''(x) = [2x^{-3}]'$$

$$\Leftrightarrow y'''(x) = -6x^{-4}$$

$$y''' \left(\frac{1}{2} \right) = -6 \left(\frac{1}{2} \right)^{-4}$$

$$\Leftrightarrow y''' \left(\frac{1}{2} \right) = -96$$

(e) Remarquons que cette fonction se simplifie

$$y(x) = \frac{(1+x^2) - x^4}{\sqrt{1+x^2} + x^2}$$

$$\Leftrightarrow y(x) = \frac{(\sqrt{1+x^2})^2 - x^4}{\sqrt{1+x^2} + x^2}$$

$$\Leftrightarrow y(x) = \frac{(\cancel{\sqrt{1+x^2}+x^2})(\sqrt{1+x^2}-x^2)}{\sqrt{1+x^2}+x^2}$$

$$\Leftrightarrow y(x) = \sqrt{1+x^2} - x^2$$

- Dérivée première

$$y'(x) = \left[(1+x^2)^{\frac{1}{2}} - x^2 \right]'$$

$$\Leftrightarrow y'(x) = \frac{1}{2}(2x)(1+x^2)^{-\frac{1}{2}} - 2x$$

$$\Leftrightarrow y'(x) = x(1+x^2)^{-\frac{1}{2}} - 2x$$

$$\Leftrightarrow y'(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} - 2x$$

$$y'(1) = \frac{1}{\sqrt{1+1^2}} - 2 \cdot 1$$

$$\Leftrightarrow y'(1) = \frac{1}{\sqrt{2}} - 2$$

- Dérivée seconde

$$y''(x) = \left[x(1+x^2)^{-\frac{1}{2}} - 2x \right]'$$

$$\Leftrightarrow y''(x) = \left[(1+x^2)^{-\frac{1}{2}} - x \frac{1}{2}(2x)(1+x^2)^{-\frac{3}{2}} - 2 \right]$$

$$\Leftrightarrow y''(x) = \left[(1+x^2)^{-\frac{1}{2}} - x^2(1+x^2)^{-\frac{3}{2}} - 2 \right]$$

$$y''(1) = (1+1^2)^{-\frac{1}{2}} - 1^2(1+1^2)^{-\frac{3}{2}} - 2$$

$$y''(1) = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2\sqrt{2}} - 2$$

$$y''(1) = \frac{1}{2\sqrt{2}} - 2$$

- Dérivée troisième

$$y'''(x) = \left[(1+x^2)^{-\frac{1}{2}} - x^2(1+x^2)^{-\frac{3}{2}} - 2 \right]'$$

$$\Leftrightarrow y'''(x) = -\frac{1}{2}(2x)(1+x^2)^{-\frac{3}{2}} - 2x(1+x^2)^{-\frac{3}{2}} - \left(-\frac{3}{2}\right)x^2(2x)(1+x^2)^{-\frac{5}{2}}$$

$$\Leftrightarrow y'''(x) = -x(1+x^2)^{-\frac{3}{2}} - 2x(1+x^2)^{-\frac{3}{2}} + 3x^3(1+x^2)^{-\frac{5}{2}}$$

$$\Leftrightarrow y'''(x) = -3x(1+x^2)^{-\frac{3}{2}} + 3x^3(1+x^2)^{-\frac{5}{2}}$$

$$y'''(1) = -3 \cdot 1(1+1^2)^{-\frac{3}{2}} + 3 \cdot 1^3(1+1^2)^{-\frac{5}{2}}$$

$$\Leftrightarrow y'''(1) = -\frac{3}{2\sqrt{2}} + \frac{3}{4\sqrt{2}}$$

$$\Leftrightarrow y'''(1) = -\frac{3}{4\sqrt{2}}$$

Exercice 9.14

1. D'abord, on cherche les points d'intersection de la courbe y et de l'axe des abscisses, c'est-à-dire les points de la courbe en lesquels $y = 0$. Puisque $y = (x-1)(x-2)(x-3)$, on a $y = 0$ pour $x = 1, 2, 3$.
2. Pour déterminer les équations des tangentes aux points $x = 1, x = 2, x = 3$, nommées respectivement T_1, T_2, T_3 , on calcule la dérivée de la fonction $y(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$ aux points $x = 1, 2, 3$.

$$y'(x) = (x-2)(x-3) + (x-1)(x-3) + (x-1)(x-2)$$

$$y'(x) = 3x^2 - 12x + 11$$

$$\Rightarrow y'(1) = 2, y'(2) = -1, y'(3) = 2$$

Donc les pentes de T_1, T_2, T_3 sont respectivement 2, -1, 2. Pour trouver l'ordonnée à l'origine, on utilise le fait que ces droites passent respectivement par les points $(1, 0), (2, 0), (3, 0)$. Ainsi pour T_1 , on a

$$y(1) = y'(1) \cdot 1 + b \Rightarrow 0 = 2 \cdot 1 + b \Rightarrow b = -2$$

Donc la tangente à la courbe au point $x = 1$ est d'équation $y = 2x - 2$.

On fait de même pour les deux autres points, et on trouve $b = 2$ pour $x = 2$ et $b = -6$ pour $x = 3$. Ainsi T_2 est d'équation $y = -x + 2$ et T_3 : $y = 2x - 6$.

3. Maintenant que nous avons les équations pour les tangentes, on peut déterminer les équations des normales à la courbe, que l'on va nommer N_1, N_2 et N_3 (qui sont normales aux tangentes).

Pour N_1 , on sait que T_1 a pour équation $y = 2x - 2$, donc $(-2, 1)$ est un vecteur normal à T_1 , donc directeur de N_1 . Une équation de N_1 est alors $x + 2y + c = 0$, où on détermine c en remplaçant dans l'équation par les coordonnées du point $(1, 0)$. Ainsi on obtient $c = -1$. D'où l'équation de la normale à la courbe au point $x = 1$ a pour équation $x + 2y - 1 = 0$, ou encore $y = -0.5x + 0.5$.

De même pour N_2 et N_3 , des vecteurs directeurs respectifs sont $(1, 1)$ et $(-2, 1)$, et les ordonnées à l'origine des normales sont -2 et -3 , ce qui donne

$$N_2 : x - y - 2 = 0 \iff y = x - 2$$

$$N_3 : x + 2y - 3 = 0 \iff y = -0.5x + 1.5$$

Exercice 9.29

- c) Notons f la fonction $x \mapsto 1 - x^{\frac{2}{3}}$. On ne peut pas appliquer ici le théorème de Rolle car la fonction f n'est pas dérivable sur $(-1, 1)$: en effet, elle n'est pas dérivable en 0, car la fonction $x \mapsto x^{\frac{2}{3}}$ n'est pas dérivable en 0.

Exercice 9.33

- a) On cherche les points où la fonction n'est pas définie, les valeurs x telles que $e^{2x} - 1 = 0$. On a donc $e^{2x} = 1 \iff 2x = 0 \iff x = 0$. Donc la fonction est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.
- b) Pour étudier la croissance de f , dérivons :

$$f'(x) = \frac{2e^{2x}(e^{2x} - 1) - (e^{2x} + 1)(2e^{2x})}{(e^{2x} - 1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-4e^{2x}}{(e^{2x} - 1)^2} < 0$$

Donc f est décroissante sur $] -\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$.

- c) Étude des asymptotes :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{2x} + 1}{e^{2x} - 1} = \frac{1}{-1} = -1$$

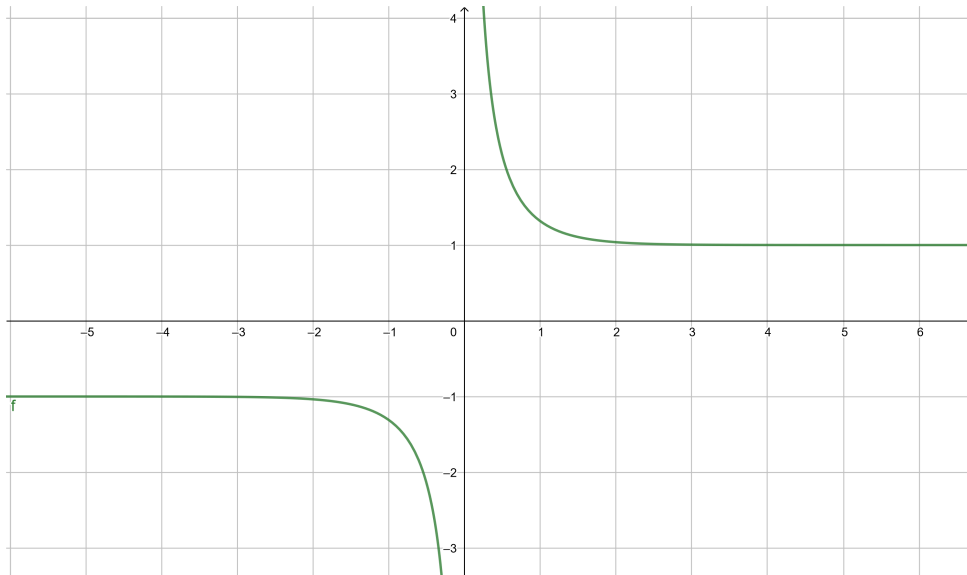
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x} + 1}{e^{2x} - 1} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{2x} + 1}{e^{2x} - 1} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{2x} + 1}{e^{2x} - 1} = -\infty$$

Ces limites nous disent donc que la fonction admet une asymptote verticale en $x = 0$, et la fonction tend vers $-\infty$ à gauche et $+\infty$ à droite, une asymptote horizontale d'équation $y = -1$ en $-\infty$ et une asymptote horizontale d'équation $y = 1$ en $+\infty$.

- d) Graphe de la fonction f .



e) Puisque g est la réciproque de f , on a $f \circ g(t) = t$. On dérive cette égalité par rapport à t :

$$g'(t) \cdot f'(g(t)) = 1$$

$$g'(t) = \frac{1}{f'(g(t))} = \frac{(e^{2g(t)} - 1)^2}{-4e^{2g(t)}}$$

On sait, puisque g est réciproque de f que $\frac{e^{2g(t)} + 1}{e^{2g(t)} - 1} = t$. On veut donc faire apparaître cette égalité, ou une puissance de cette égalité. On a

$$\frac{1}{g'(t)} = \frac{-4e^{2g(t)}}{(e^{2g(t)} - 1)^2} = -\frac{(e^{4g(t)} + 2e^{2g(t)} + 1 - e^{4g(t)} + 2e^{2g(t)} - 1)}{(e^{2g(t)} - 1)^2}$$

$$\frac{1}{g'(t)} = -\frac{(e^{2g(t)} + 1)^2 - (e^{2g(t)} - 1)^2}{(e^{2g(t)} - 1)^2}$$

$$\frac{1}{g'(t)} = -(t^2 - 1)$$

$$g'(t) = \frac{-1}{t^2 - 1}$$

Fonctions logarithmes

Exercice 8.28

a) On veut calculer la dérivée de $f(x) = x^r$, où $r \in \mathbb{R}$. Si $r \neq 0$, alors

$$\begin{aligned}\ln f(x) &= r \ln x \\ \frac{f'(x)}{f(x)} &= r \frac{1}{x} \\ f'(x) &= r \frac{x^r}{x} = rx^{r-1}\end{aligned}$$

Si $r = 0$, alors $f(x) = 1$ et $f'(x) = 0$.

d) On veut calculer la dérivée de $f(x) = a^x$, où $a \in \mathbb{R}$.

Si $a < 0$, alors la fonction n'est pas définie en dehors des entiers. Donc la dérivée n'est pas définie.

Si $a = 0$, alors f n'est pas définie sur les négatifs, $f(x) = 0$ pour tout $x > 0$, et $f(0) = 1$. D'où f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et $f'(x) = 0$.

Si $a > 0$, alors

$$\begin{aligned}\ln f(x) &= x \ln(a) \\ \frac{f'(x)}{f(x)} &= \ln a \\ f'(x) &= \ln a a^x\end{aligned}$$

e) On veut calculer la dérivée de $f(x) = \sin x^{\cos x}$.

Cette fonction n'est définie que si $\sin x > 0$, c'est-à-dire sur les intervalles $]0 + 2k\pi, \pi + 2k\pi[$, $k \in \mathbb{Z}$, et sa dérivée vaut :

$$\begin{aligned}\ln f(x) &= \cos x \ln \sin x \\ \frac{f'(x)}{f(x)} &= -\sin x \ln \sin x + \cos x \frac{\cos x}{\sin x} \\ f'(x) &= -\sin x^{\cos x + 1} \ln \sin x + \cos x^2 \sin x^{\cos x - 1}\end{aligned}$$

Exercice 8.19

On cherche les valeurs de a pour lesquelles les courbes $y = e^{2x} + 1$ et $y = 2ae^x$ admettent des points d'intersection.

D'une part, la fonction e^x est strictement positive, donc $e^{2x} + 1$ l'est aussi, et $2ae^x$ est du signe de a . Il faut donc que a soit strictement positif.

D'autre part,

$$e^{2x} + 1 = 2ae^x \iff e^{2x} - 2ae^x + 1 = 0$$

On pose $y = e^x$, et l'équation précédente revient à résoudre

$$y^2 - 2ay + 1 = 0$$

Le discriminant est égal à $4a^2 - 4 = 4(a^2 - 1)$. Ce discriminant est positif si $a^2 - 1 \geq 0 \implies a \geq 1$. Donc les deux courbes n'admettent pas de point d'intersection si $a < 1$.

Si $a \geq 1$, alors les solutions sont

$$\frac{2a \pm 2\sqrt{a^2 - 1}}{2} = a \pm \sqrt{a^2 - 1}$$

Il faut maintenant vérifier pour quelles valeurs de a au moins une des deux solutions est positive, pour que $y = e^x$ existe.

Puisque $a > 1$, alors $a + \sqrt{a^2 - 1}$ est positif, et on a

$$a - \sqrt{a^2 - 1} > 0 \iff a > \sqrt{a^2 - 1} \iff a^2 > a^2 - 1$$

Cette dernière égalité est toujours vraie, donc les deux solutions sont positives. De plus, les deux solutions sont égales si et seulement si $a = 1$. Donc les courbes admettent deux points d'intersection si $a > 1$, et n'admet qu'un point d'intersection pour $a = 1$.

Ce point d'intersection est $e^x = y = 1$, donc $x = 0$. En ce point, les dérivées des deux courbes sont

$$\begin{aligned} (e^{2x} + 1)' &= 2e^{2x} \implies y'(0) = 2 \\ (2e^x)' &= 2e^x \implies y'(0) = 2 \end{aligned}$$

Les deux dérivées sont égales donc les courbes sont tangentes. Enfin, l'équation de cette tangente est $y = 2x + b$, où en remplaçant par les coordonnées du point d'intersection $(0, 2)$, on obtient $b = 2$. Donc l'équation de la tangente est $y = 2x + 2$.