

MATH-F112
Correction du TP8
Fonctions dérivables: Applications et Taylor

Fonctions dérivables : Applications et Taylor

Exercice 10.5

Nous avons deux nombres réels x et y , dont la somme fait 12, donc $x + y = 12$ ce qui équivaut à $y = 12 - x$.

Nous cherchons à maximiser le produit $x * y = x * (12 - x)$. Par conséquent, nous devons optimiser la fonction $P(x) = 12x - x^2$.

Nous cherchons les extrémums de cette fonction. Nous la dérivons pour faire cela. Nous obtenons

$$P'(x) = 12 - 2x.$$

Les extrémums sont solutions de l'équation $P'(x) = 0$, donc $12 - 2x = 0$ ce qui implique que le seul extrémum possible est en $x = 6$.

La dérivée seconde est strictement négative : $P''(x) = -2$. En particulier $P(6) < 0$. Il s'en suit que 6 est le maximum de la fonction. Nous calculons $P(6) = 36$, donc la valeur maximale du produit est 36.

Exercice 10.8

Soit x et y la longueur et la largeur du carton publicitaire en *cm*. Ainsi, nous voudrions minimiser l'aire du carton A qui se formule ainsi

$$A = xy.$$

En retirant les marges, nous pouvons exprimer l'aire du texte imprimé comme suit

$$(x - 2)(y - 3) = 54.$$

Dés lors, nous pouvons exprimer y et ensuite A seulement en fonction de x :

$$y(x) = \frac{54}{x-2} + 3 \quad A(x) = x \left(\frac{54}{x-2} + 3 \right).$$

Désormais, nous pouvons extrémiser A en dérivant

$$A'(x) = \frac{54}{x-2} + 3 - x \frac{54}{(x-2)^2} = 3 \frac{(x-2)^2 - 36}{(x-2)^2}.$$

Ensuite,

$$A'(x) = 0 \iff (x-2)^2 = 36 \iff x = 8 \text{ ou } x = -4.$$

Comme dans notre énoncé x représente une longueur positive, nous considérons seulement valeur critique $x = 8$. Nous observons que cette dernière est un minimum de A , en considérant le signe de la dérivée seconde

$$A''(x) = 6 \frac{36}{(x-2)^3} \quad A''(8) = 1 > 0.$$

Exercice 10.9

La somme de deux nombres est 12. Trouver ces nombres si

- a) la somme de leurs carrés est minimal ;*
- b) le produit de l'un avec le carré de l'autre est maximal ;*
- c) le produit de l'un avec le cube de l'autre est maximal.*

a) Soient x et y deux nombres réels. Par hypothèse leur somme est égale à 12, ce qui permet d'écrire

$$x + y = 12 \Leftrightarrow y = 12 - x.$$

La somme de leurs carrés peut s'écrire comme une fonction que l'on notera $f(x, y)$ et qui est une fonction à deux variables x et y . Celle-ci s'écrit tout naturellement

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

Si on injecte (??) dans (??), on peut réécrire cette fonction $f(x, y)$ comme une fonction d'une seule variable, x . A noter, on aurait pu isoler le x dans (??) pour obtenir une fonction ne dépendant que de y .

$$\begin{aligned} f(x, y) &= x^2 + y^2 \\ \Leftrightarrow f(x) &= x^2 + (12 - x)^2 \\ \Leftrightarrow f(x) &= x^2 + 144 - 24x + x^2 \\ \Leftrightarrow f(x) &= 2x^2 - 24x + 144 \end{aligned}$$

Les candidats extremum (valeurs de x qui rendent la fonction minimale ou maximale) sont les valeurs de x qui annulent la dérivée de $f(x)$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ \Leftrightarrow [2x^2 - 24x + 144]' &= 0 \\ \Leftrightarrow 4x - 24 &= 0 \\ \Leftrightarrow 4x &= 24 \\ \Leftrightarrow x &= 6 \end{aligned}$$

Le seul candidat extremum est donc $x = 6$. Ici nous pourrions tout de suite conclure que $x=6$ est un minimum de la fonction $f(x)$ étant donné l'allure de celle-ci. En effet, il s'agit d'un polynôme du second degré (donc une parabole) avec un signe + devant le terme en x^2 , ce qui signifie que la parabole est convexe ("contente"). Par conséquent, le seul extremum possible sera bien minimum.

Pour s'en convaincre plus formellement, analysons le signe de la dérivée seconde évalué au point d'abscisse $x = 6$. A noter que l'on pourrait aussi faire une étude de signe de la fonction $f'(x)$. La dérivée seconde de la fonction $f(x)$ vaut

$$\begin{aligned} f''(x) &= [4x - 24]' \\ \Leftrightarrow f''(x) &= 4. \end{aligned}$$

Si on évalue cette fonction au point $x = 6$, on obtient 4 puisque l'expression de la dérivée seconde ne dépend plus de x (logique puisqu'une parabole est toujours concave ou convexe sur tout $\mathbb{R}$). La valeur 4 étant positive, on en déduit que la fonction est convexe en $x = 6$ (et partout) et que par conséquent, $x = 6$

correspond bien à un maximant de la fonction $f(x)$. Si on insère cette valeur dans l'expression (??), on en déduit que $y = 6$. Par conséquent, la somme maximale des carrés de x et y vaut

$$6^2 + 6^2 = 72.$$

b) Soit x et y deux nombres réels. Par hypothèse leur somme est égale à 12, ce qui permet d'écrire

$$x + y = 12 \Leftrightarrow y = 12 - x.$$

Le produit de l'un avec le carré de l'autre peut s'écrire comme une fonction que l'on notera $f(x, y)$ et qui est une fonction à deux variables x et y . Celle-ci s'écrit tout naturellement

$$f(x, y) = x^2 y.$$

On aurait pu choisir $(f(x, y) = xy^2)$ également, cela reviendrait à la même chose. Si on injecte (??) dans (??), on peut réécrire cette fonction $f(x, y)$ comme une fonction d'une seule variable $f(x)$.

$$\begin{aligned} f(x, y) &= x^2 y \\ \Leftrightarrow f(x) &= x^2 (12 - x) \\ \Leftrightarrow f(x) &= -x^3 + 12x^2. \end{aligned}$$

Les candidats extremum (valeurs de x qui rendent la fonction minimale ou maximale) sont les valeurs de x qui annulent la dérivée de $f(x)$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ \Leftrightarrow [-x^3 + 12x^2]' &= 0 \\ \Leftrightarrow -3x^2 + 24x &= 0 \\ \Leftrightarrow 3x(-x + 8) &= 0 \\ \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = 8. \end{aligned}$$

Les deux candidats extrema sont donc $x = 0$ et $x = 6$. Il nous faut maintenant déterminer le type d'extrémants de chacun de ces deux points sachant que nous nous sommes intéressés par celui qui est maximant puisque nous cherchons à maximiser la fonction $f(x)$. Pour ce faire, analysons les signes pris par la dérivée seconde évaluée aux points d'abscisse $x = 0$ et $x = 8$. La dérivée seconde de la fonction $f(x)$ vaut

$$\begin{aligned} f''(x) &= [-3x^2 + 24x]' \\ \Leftrightarrow f''(x) &= -6x + 24. \end{aligned}$$

Par conséquent, on a

$$\begin{cases} f''(0) = -6 \cdot 0 + 24 = 24 > 0 & \rightarrow 0 \text{ est minimant} \\ f''(8) = -6 \cdot 8 + 24 = -24 < 0 & \rightarrow 8 \text{ est maximant} \end{cases}$$

On retient donc la valeur $x = 8$. Si on insère cette valeur dans l'expression (??), on en déduit que $y = 4$. Par conséquent, le produit de carré maximal de l'un avec l'autre donne :

$$8^2 \cdot 4 = 256.$$

c) Le principe sera encore une fois totalement similaire ici.

$$f(x, y) = x^3 y$$

En remplaçant y par $12 - x$, on obtient

$$\begin{aligned} f(x, y) &= x^3 y \\ \Leftrightarrow f(x) &= x^3 (12 - x) \\ \Leftrightarrow f(x) &= -x^4 + 12x^3. \end{aligned}$$

On va regarder pour quelles valeurs de x la dérivée va s'annuler.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ \Leftrightarrow [-x^4 + 12x^3]' &= 0 \\ \Leftrightarrow -4x^3 + 36x^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow 4x^2(-x + 9) &= 0 \\ \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = 9. \end{aligned}$$

Les deux candidats extrema sont donc $x = 0$ et $x = 9$. Il nous faut maintenant déterminer quel type d'extrémant sont ces deux candidats. On sélectionnera ensuite le maximant puisque nous cherchons à maximiser la fonction $f(x)$. Pour ce faire, analysons les signes pris par la dérivée seconde évaluée aux points d'abscisse $x = 0$ et $x = 9$. La dérivée seconde de la fonction $f(x)$ vaut

$$\begin{aligned} f''(x) &= [-4x^3 + 36x^2]' \\ \Leftrightarrow f''(x) &= -12x^2 + 72x. \end{aligned}$$

Par conséquent, on a

$$\begin{cases} f''(0) = -12 \cdot 0^2 + 72 \cdot 0 = 0 & \rightarrow 0 \text{ est possiblement un point d'inflexion} \\ f''(9) = -12 \cdot 9^2 + 72 \cdot 9 = -324 < 0 & \rightarrow 9 \text{ est maximant} \end{cases}$$

On retient donc $x = 9$. Si on insère cette valeur dans l'expression initiale, on en déduit que $y = 3$. Par conséquent, le produit maximal du cube de l'un avec l'autre donne :

$$9^3 \cdot 3 = 2187.$$

Exercice 10.14

En dérivant y , nous pouvons déterminer ses points critiques

$$y'(x) = 1 - \frac{q^2}{x^2} \qquad y'(x) = 0 \iff x = q \text{ ou } x = -q.$$

Ainsi les valeurs extrémales sont

$$y(q) = p + 2q \qquad y(-q) = p - 2q.$$

Afin que ces deux dernières valeurs soient respectivement égales à 4 et à 0, il suffit de choisir

$$p = 2 \qquad q = 1.$$

Exercice 10.19

- a) La fonction f est bien définie sauf pour

$$x^2 - 2x - 3 = (x+1)(x-3) = 0,$$

donc $\text{dom} f = \mathbb{R} \setminus \{-1, 3\}$.

- b) Pour que f soit croissante, il suffit demander que $f'(x) > 0$ sur tout son domaine. Notons

$$p(x) = mx - 7 \qquad q(x) = x^2 - 2x - 3.$$

Ainsi,

$$f(x) = 1 + \frac{p(x)}{q(x)} \qquad f'(x) > 0 \iff p'(x)q(x) - p(x)q'(x) > 0.$$

Cependant, pour que ce polynôme soit toujours positif

$$\begin{aligned} p'(x)q(x) - p(x)q'(x) &= m(x^2 - 2x - 3) - (mx - 7)(2x - 2) \\ &= -mx^2 + 14x - (3m + 14) \\ &= -m(x^2 + 3) + 14(x - 1) \\ &= -m(x^2 + 3) + 14(x - 1) - 7(x^2 + 3) + 7(x^2 + 3) \\ &= (-m - 7)(x^2 + 3) + 7(2x - 2) + 7(x^2 + 3) \\ &= (-m - 7)(x^2 + 3) + 7(x + 1)^2 > 0 \end{aligned}$$

il faudrait que

$$-m - 7 > -7 \frac{(x+1)^2}{x^2 + 3}$$

pour tout $x \in \text{dom} f$. Ceci est équivalent à demander à ce que $-m - 7 \geq 0$ et donc

$$m \leq -7.$$

- c) Pour $m \leq -7$, la fonction est partout croissante et ne peut donc pas posséder de minimum ou de maximum. Pour $m > -7$, nous observons que

$$\lim_{x \rightarrow -7^\pm} f(x) = \pm\infty.$$

Donc, f ne possède pas de minimum ou de maximum.

- d) La fonction en un tel point ne dépendrait pas de m , ainsi on s'attend à ce que la dérivée par rapport à m s'annule en ce point

$$\frac{x}{q(x)} = 0 \iff x = 0$$

Ainsi, toutes les fonctions ont la même valeur à l'origine.

Exercice 10.22

- n) On a la condition d'existence $x \neq 2$. Puisque l'on a une valeur absolue, la fonction est toujours positive. La fonction a deux racines : une en -2 et une en 1. On calcule la limite en 2 :

$$\lim_{x \rightarrow 2} \left| \frac{(x-1)(x+2)}{x-2} \right| = \lim_{x \rightarrow 2} \left| \frac{-4}{x-2} \right| = +\infty.$$

Ce qui signifie que nous avons une asymptote verticale en 2. On regarde s'il y a une asymptote en $x \rightarrow +\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left| \frac{(x-1)(x+2)}{x-2} \right| / x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - 2x} = 1.$$

On a une asymptote oblique de pente 1, calculons maintenant son ordonnée à l'origine.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left| \frac{(x-1)(x+2)}{x-2} \right| - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + x - 2 - x^2 + 2x}{x-2} = 3.$$

Il y a donc une asymptote oblique d'équation $y = x + 3$ en $x \rightarrow +\infty$.

Un calcul similaire donne à gauche une asymptote oblique d'équation $y = -x + 3$.

Nous allons maintenant chercher les extrémums locaux de la fonction. Vu qu'il y a une valeur absolue dans l'expression de la fonction, nous allons commencer par identifier le signe de $\frac{(x-1)(x+2)}{x-2}$. Étant donné que l'expression est déjà factorisée, nous savons que les changements de signes ne peuvent se passer qu'en 1, -2 et 2. Nous trouvons le tableau de signe suivant :

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c} & -2 & & 1 & & 2 & \\ \hline - & 0 & + & 0 & - & \cancel{0} & + \end{array}.$$

Donc sur l'intervalle $] -2; 1[$ et sur l'intervalle $]2; +\infty[$ la fonction vaut $\frac{(x-1)(x+2)}{x-2}$ tandis que sur les intervalles $] -\infty; -2[$ et $]1; 2[$ nous devons utiliser l'expression $-\frac{(x-1)(x+2)}{x-2}$.

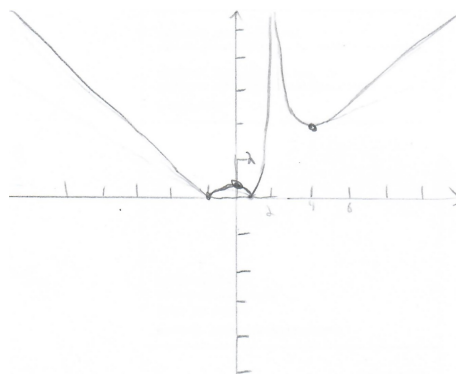
Dans le premier cas la dérivée vaut $\frac{x(x-4)}{(x-2)^2}$ tandis que dans le second elle vaut $-\frac{x(x-4)}{(x-2)^2}$.

Le tableau de signe de la dérivée est donc :

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c|c|c} & -2 & & 0 & & 1 & & 2 & & 4 \\ \hline - & \cancel{0} & + & 0 & - & \cancel{0} & + & \cancel{0} & - & 0 & + \end{array}.$$

Cela donne un maximum local en 0 et un minimum local en 4.

En mettant toutes ces informations ensembles, on trouve le graphe suivant :



r) On a la condition d'existence $x \neq 0$.

Lorsque x tend vers $\pm\infty$, on a que $\frac{1}{x}$ tend vers 0, du coup $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} e^{\frac{1}{x}} = 1$. La fonction $x * e^{\frac{1}{x}}$ a donc une asymptote oblique de pente 1 en $\pm\infty$. Pour avoir l'ordonnée à l'origine de nos asymptotes obliques, on effectue le calcul $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} x e^{\frac{1}{x}} - x = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^y - 1}{y} = 1$. La dernière égalité provient du fait que la limite écrite est la définition de la dérivée en 0 de e^y . En conclusion, nous avons l'asymptote oblique $y = x + 1$.

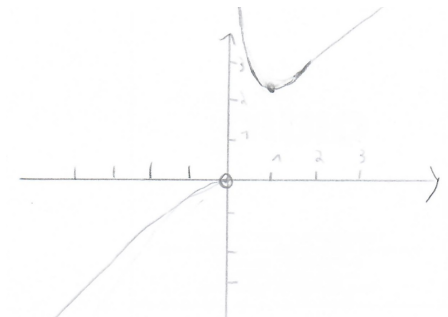
Un calcul semblable permet d'évaluer $\lim_{x \rightarrow 0^-} x e^{\frac{1}{x}} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} x e^{\frac{1}{x}} = +\infty$.

La dérivée de la fonction est $\frac{e^{\frac{1}{x}}(x-1)}{x}$, dont le tableau de signes est le suivant :

$$\begin{array}{c|c|c|c|c} & 0 & & 1 & \\ \hline + & \neq & - & 0 & + \end{array}.$$

Cela nous donne un minimum local en 1.

En mettant tous ces éléments ensemble, on trouve le graphe suivant :



Exercice 10.28

$$\sin(x) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\left(x - \frac{\pi}{6}\right) - \frac{1}{4}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)^2 + \dots \quad (1)$$

Comme 1° degré correspond à $\frac{\pi}{180}$ radians,

$$\sin(32^\circ) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\pi}{90} - \frac{1}{4} \left(\frac{\pi}{90}\right)^2 + \dots = 0.529925\dots$$

Exercice 10.34

(f) Comme

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \Rightarrow xe^{-x} = x \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^k}{k!} = - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k x^k}{(k-1)!} = x - x^2 + \frac{x^3}{2} + \dots$$