



Combinatoire

2.13. Soient 10 boules rouges et 3 boules vertes. De combien de manières

a. ces 13 boules peuvent-elles être disposées en ligne ?

b. ces 13 boules peuvent-elles être disposées en ligne, si seulement la couleur des boules a de l'importance ?

a) 13 12 11 10 9 8 7 6 5 4 3 2 1

Il y a $13!$ manières de disposer les boules en ligne.

b) 2 visions des choses, un seul résultat

$$\begin{array}{l} \text{Placer les boules} \leftarrow 13! \\ \text{Permuter les rouges} \leftarrow 10! \cdot 3! \\ \text{Permuter les vertes} \leftarrow 3! \end{array} = \binom{13}{3} \begin{array}{l} \text{Nombre d'emplacements} \\ \text{Nombre de verts} \end{array}$$

$$\text{NB: } \binom{13}{3} = \frac{13!}{10! \cdot 3!} = \binom{13}{10}$$

$$\frac{13!}{10! \cdot 3!} = \frac{13 \cdot 12 \cdot 11}{3 \cdot 2} = 13 \cdot 11 \cdot 2 = 143 \cdot 2 = 286$$

Il y a 286 manières de disposer les boules en ligne sans distinguer les boules d'une même couleur.

Combien de ces 13 boules faut-il prendre au minimum pour en avoir certainement

d. 3 rouges ?

f. deux de couleurs différentes ?

d) $\underbrace{3}_{\text{les 3 vertes}} + \underbrace{3}_{\text{les 3 rouges}} = 6$ Il faut prendre au moins 6 boules pour être sûr d'en avoir au moins 3 rouges

f) $\underbrace{10}_{\text{les 10 rouges}} + \underbrace{1}_{\text{les 1 vert}} = 11$ Il faut prendre au moins 11 boules pour être sûr d'avoir une boule de chaque couleur.

2.14. 17 tâches doivent être assignées à 5 processeurs. De combien de manières est-ce possible

a. en général ? objets

boîtes

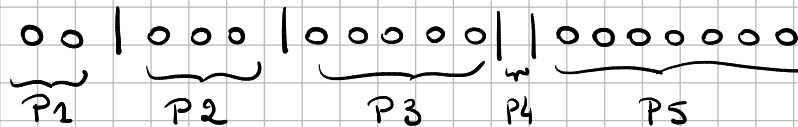
b. si chaque processeur traite au plus 3 tâches ?

c. si chaque processeur traite au moins 1 tâche ?

Modélisation:

0 := objets

1 := séparation des boîtes



→ Nombre d'assignations = nombre de tels codes.

4 symboles "1"

17 symboles "0"

= 21 symboles au total

a) Choisir la place des "1" (ou des "0"): $\binom{21}{4} = \binom{21}{17} = \frac{21!}{17!4!}$

Il y a $\binom{21}{4}$ assignations possibles.

b) Contrainte supplémentaire: au plus 3 tâches par processeur.

$$\frac{17}{3} = 5 + \frac{2}{3} > 5 = \# \text{ processeurs.}$$

Il n'est pas possible de trouver une telle assignation: il y a plus de $3 \cdot 5 = 15$ tâches à assigner.

c) Contrainte supplémentaire: au moins 1 tâche par processeur.

Chaque processeur reçoit une tâche. Il reste $17 - 5 = 12$ tâches à répartir entre les 5 processeurs, soit $\binom{12+4}{4} = \binom{16}{4}$ assignations possibles.

2.18. Une adresse IPv4 est une séquence de 4 nombres naturels, chacun de 0 à 255. Évaluez sans calculatrice (via l'approximation $1024 \approx 1000$) le nombre total de ces adresses : est-il de l'ordre du million ? du milliard ? Vérifiez avec une calculatrice.

Exemple d'adresse IPv4 : 101 . 12 . 251 . 0

10^3 : millier

10^6 : million

10^9 : milliard

Nombre d'adresses possibles : $256 \cdot 256 \cdot 256 \cdot 256$

$$= (256)^4 = (2^8)^4 = 2^{32} = 4 \cdot 2^{30} = 4 \cdot (2^{10})^3 = 4 \cdot (1024)^3 \\ \approx 4 \cdot (10^3)^3 = 4 \cdot 10^9$$

Le nombre total d'adresses est de l'ordre du milliard.

→ Calculatrice : $(256)^4 = 4\,294\,967\,296$

2.21. Le nombre de mots obtenus en réarrangeant les lettres du mot

TALLAHASSEE

est-il plus grand que le nombre similaire en partant plutôt du mot suivant ?

MISSISSIPPI

TALLAHASSEE : 11 lettres

T: 1
A: 3
L: 2
H: 1
S: 2
E: 2

Il y a

toutes les lettres

11!

$3! 2! 2! 2!$

avec répétition

réarrangements possibles
des lettres de TALLAHASSEE.

MISSISSIPPI : 10 lettres

M: 1
I: 4
S: 4
P: 1

Il y a

10!

$4! 4!$

réarrangements possibles
des lettres de MISSISSIPPI.

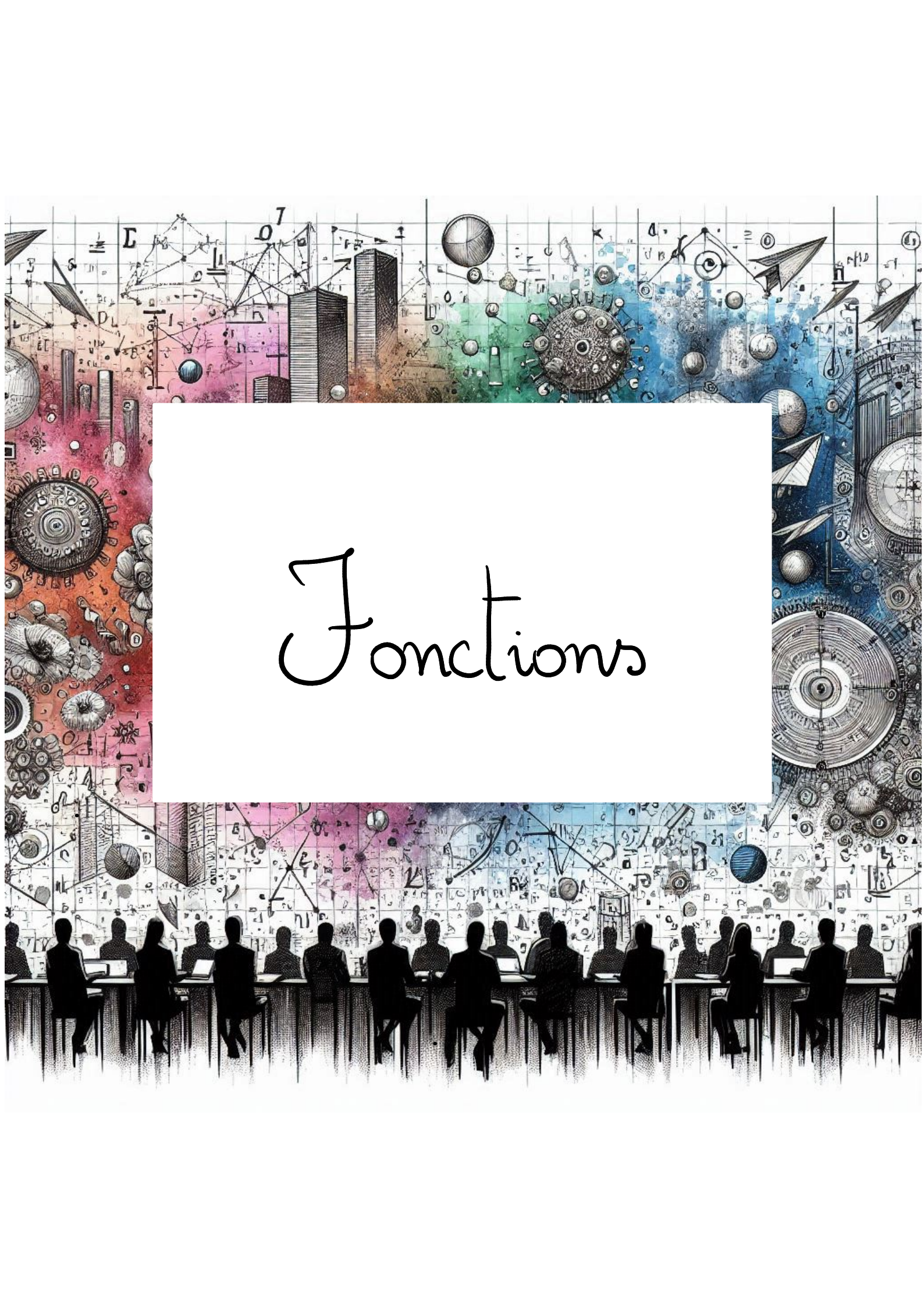
$$\frac{11!}{3! 2! 2! 2!} = \frac{11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}$$

$$= 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 3$$

$$\frac{10!}{4! 4!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{4 \cdot 3 \cdot 2}$$

$$= 10 \cdot 9 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 2$$

Il y a plus de réarrangements des lettres de TALLAHASSEE que de MISSISSIPPI.



Fonctions

DOMAINE

Conditions d'existence

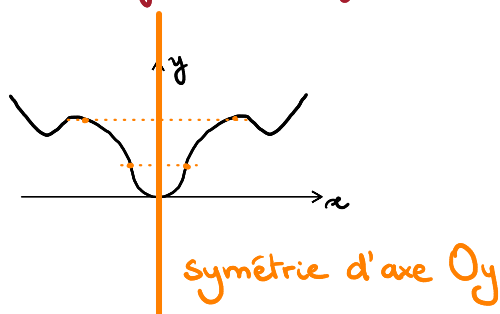
→ racines paires

→ fractions

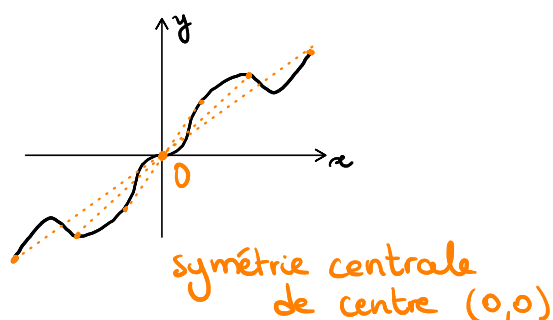
(→ logarithmes)

PARITÉ

Paire $f(-x) = f(x)$



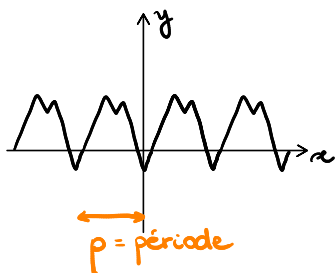
Impaire $f(-x) = -f(x)$



f		g	→	$f+g$
paire	+	paire	→	pair
¬ paire	+	paire	→	¬ pair
¬ paire	+	¬ paire	→	?

f		g	→	$f+g$
impaire	+	impaire	→	impaire
¬ impaire	+	impaire	→	¬ impaire
¬ impaire	+	¬ impaire	→	?

PÉRIODICITÉ



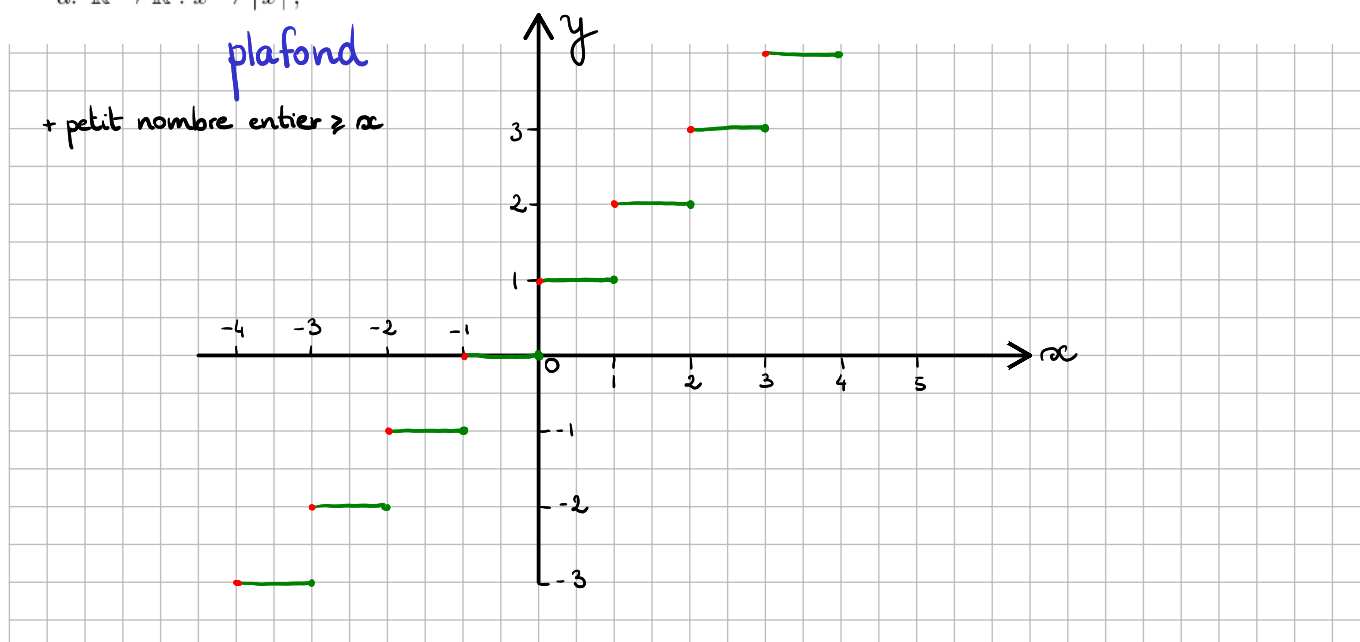
$$f(x) = f(x + \underline{p})$$

p est le + petit nombre satisfaisant cette propriété

	f	+	g	→	périodique si	$\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$
période	p		q		si $\frac{p}{q} = \frac{a}{b}$ réduite	période $f+g$ est $b \cdot p = a \cdot q$

3.1. Tracer le graphe des fonctions suivantes :

a. $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \rightarrow \lceil x \rceil$;



3.2. Déterminer le plus grand domaine de chacune des fonctions suivantes :

f. $x \mapsto \sqrt{\sin x}$

b. $x \mapsto \frac{x-1}{x^2-5x+6} + \sqrt[3]{2x+1}$

c. $x \mapsto \frac{\sqrt{x-1}}{x^2-4}$

b) CE: fraction: $x^2-5x+6 \neq 0$
 $\Delta \propto \Sigma 4\pi$
 $\Leftrightarrow (x-3)(x-2) \neq 0$
 $\Leftrightarrow x \neq 3 \text{ et } x \neq 2$

$\text{Dom } f = \mathbb{R} \setminus \{2, 3\}$

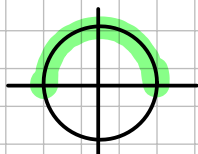
c) CE: • fraction: $x^2-4 \neq 0$
 $\Leftrightarrow x^2 \neq 4$
 $\Leftrightarrow x^2 \neq \pm 2$

$\text{Dom } g = [1; +\infty[\setminus \{2\}$

• racine paire: $x-1 \geq 0$
 $\Leftrightarrow x \geq 1$

f) CE: racine paire: $\sin x \geq 0$

$\text{Dom } h = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} [2k\pi, \pi + 2k\pi]$



$\Leftrightarrow 0 + 2k\pi \leq x \leq \pi + 2k\pi$
 avec $k \in \mathbb{Z}$

3.3. Parmi les fonctions suivantes, indiquer celles qui sont paires, impaires, périodiques. Pour les fonctions périodiques, déterminer la période. Chacune des fonctions envoie x sur le y indiqué (ou encore : $y = f(x)$) ; A, B et λ sont des constantes.

b. $y = x^3$

c. $y = |\sin x|$

h. $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

m. $y = 3 \cos\left(\frac{1}{3}x\right) + 2 \sin\left(\frac{1}{2}x\right)$

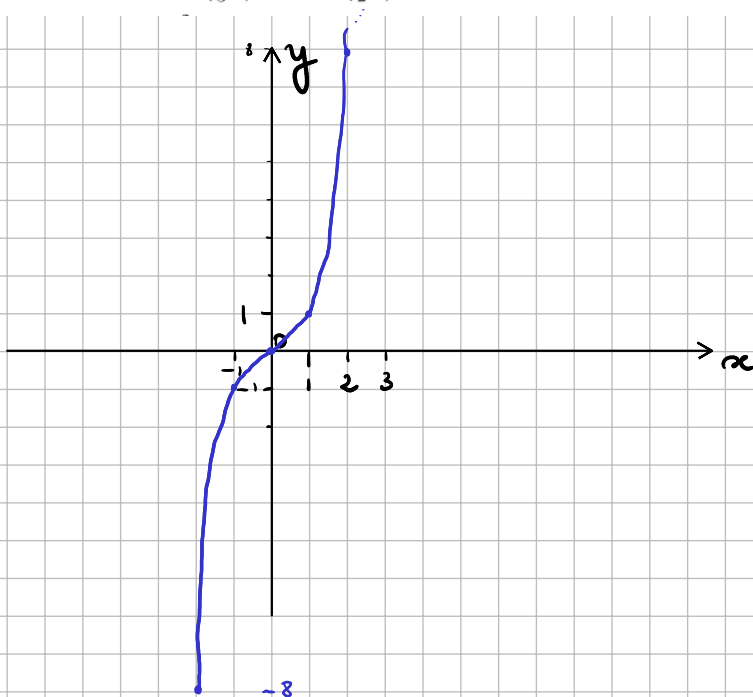
b) $y = x^3$

• parité

$$f(-x) = (-x)^3 = -x^3 \\ = -f(x)$$

• périodicité X

La fonction $y = x^3$ est impaire
et non-périodique



c) $y = |\sin x|$

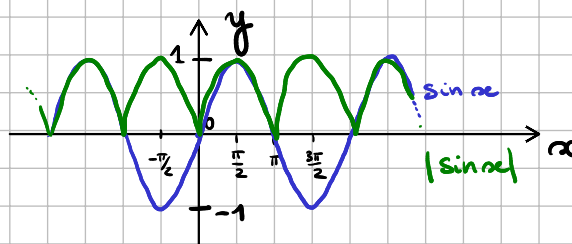
• parité

$$f(-x) = |\sin(-x)| = |-\sin x| \\ = |\sin x| = f(x)$$

• périodicité

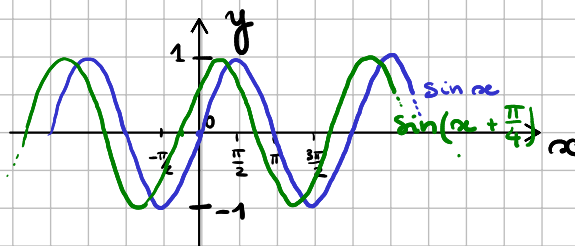
$$f(x + \pi) = |\sin(x + \pi)| = |-\sin x| \\ = |\sin x| = f(x)$$

La fonction $y = |\sin x|$ est paire et périodique, de période π .



h) $y = \sin(x + \frac{\pi}{4})$

• parité $\times$

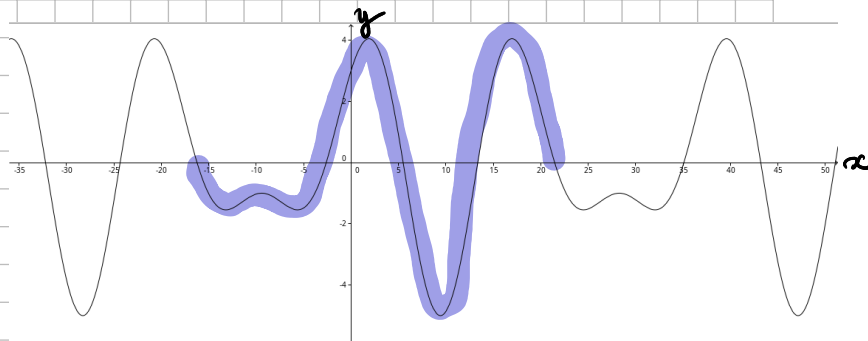


• périodicité $f(x+2\pi) = f(x)$

La fonction $y = \sin(x + \frac{\pi}{4})$ est périodique de période 2π .
Elle n'est ni paire ni impaire.

m) $y = 3\cos(\frac{x}{3}) + 2\sin(\frac{x}{2})$

• parité $\times$



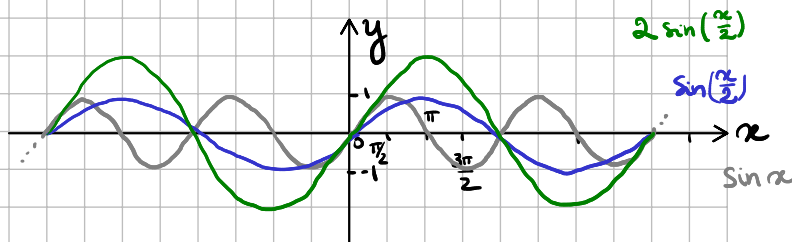
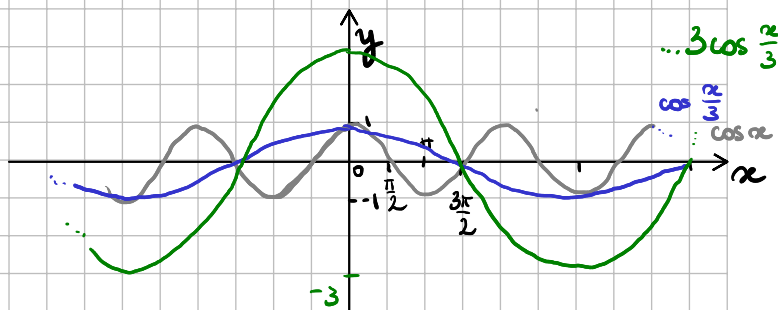
• périodicité

$\rightarrow 3\cos \frac{x}{3} : 2\pi \cdot 3$

$\rightarrow 2\sin \frac{x}{2} : 2\pi \cdot 2$

$\rightarrow 3\cos \frac{x}{3} + 2\sin \frac{x}{2} :$

$\pi \cdot \text{ppcm}(6, 4) = 12$



La fonction $y = 3\cos(\frac{x}{3}) + 2\sin(\frac{x}{2})$ est périodique de période 12π . Elle n'est ni paire ni impaire.

