



Logique

Symboles logiques

implication	$\rightarrow$	$A \rightarrow B$ est fausse <u>uniquement</u> si A est vrai <u>et</u> B est fausse.
Δ ou non-exclusif	$\vee$	$A \vee B$ est fausse <u>uniquement</u> si A et B sont toutes les deux fausses.
et	$\wedge$	$A \wedge B$ est vraie <u>uniquement</u> si A et B sont toutes les deux vraies.
négation	$\neg$	

Symboles mathématiques

$\forall$ « Pour tout/s » , « on a »

$\exists$ « Il existe » : ou | « tel que »

$\exists!$ « Il existe un et un seul »
(un unique)

$\in$ appartenant à ($\notin$ n'appartenant pas à)

$\subseteq$ inclus dans l'ensemble

Négation

$$\neg(A \vee B) \leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$$

$$\neg(A \wedge B) \leftrightarrow \neg A \vee \neg B$$

$$\neg(\forall(x \in B), A) \leftrightarrow \exists(x \in B) : \neg A$$

$$\neg(\exists(x \in B) : A) \leftrightarrow \forall(x \in B), \neg A$$

1.1. Traduisez chacune des affirmations suivantes par une formule logique en utilisant les lettres indiqués et les symboles $\rightarrow$ (« implique »), $\vee$ (« ou »), $\wedge$ (« et ») et, si nécessaire, le symbole $\neg$ (« non »).

c. S'il pleut ou neige, le match sera annulé. (P,N,A)

alors

$$P \vee N \rightarrow A$$

d. Pour que deux vecteurs soient orthogonaux, il faut et il suffit que leur produit scalaire soit nul. (O,N)

$$(O \rightarrow N) \wedge (O \leftarrow N)$$

on peut aussi écrire : $O \leftrightarrow N$

1.3. Déterminez lesquelles des argumentations suivantes sont correctes.

b. Si le prix de l'essence augmente, le coût de la vie augmente. Lorsque le coût de la vie augmente, la popularité du gouvernement baisse. Donc, si l'essence devient plus chère, le gouvernement perd en popularité.

$$\bullet \quad E \nearrow \rightarrow V \nearrow \quad \text{et} \quad V \nearrow \rightarrow P \searrow$$

$$\bullet \quad E \nearrow \rightarrow P \searrow \quad \text{par transitivité de l'implication}$$

L'affirmation est correcte.

c. Une augmentation du prix du pain ou du thé est prévue. Comme le pain coûte plus cher, le prix du thé est inchangé.

$$P \nearrow \vee T \nearrow$$

⚠ "ou" est non-exclusif !

Cette affirmation n'est pas correcte.

f. Si un nombre est divisible par 4, il est pair. Comme le nombre donné n'est pas divisible par 4, il n'est pas pair.

$$(D4 \rightarrow P) \not\rightarrow (\neg D4 \rightarrow \neg P)$$

Cette affirmation n'est pas correcte.

A priori, l'implication ne fonctionne que dans un sens.

NB: La contraposée est vraie:

$$\neg P \rightarrow \neg D4$$

1.9. En utilisant les abréviations

$\mathbb{N}$ pour l'ensemble des nombres naturels,

$P(x)$ pour « x est pair »,

$I(x)$ pour « x est premier »,

traduisez en formules logiques les assertions suivantes :

- TP {
- a. Il existe un nombre naturel pair ;
 - b. Il existe un nombre naturel pair et premier ;
 - c. Il est faux que tout nombre naturel pair est premier ;
 - d. Il existe un seul nombre naturel à la fois pair et premier.

c) $\neg (\forall x \in \mathbb{N}, P(x) \rightarrow I(x))$

d) $\exists! x \in \mathbb{N} : P(x) \wedge I(x)$

1.17. La négation de $\forall \epsilon > 0, \exists N, \forall n \geq N : |f(n)| < \epsilon$ est

- $\forall \epsilon > 0, \nexists N$ tel que $\forall n \geq N : |f(n)| < \epsilon$
- $\exists \epsilon > 0$, tel que $\forall N, \exists n \geq N : |f(n)| \geq \epsilon$
- $\forall \epsilon > 0, \exists N$ tel que $\forall n \geq N : |f(n)| \geq \epsilon$
- $\exists N$ tel que $\forall \epsilon > 0, \exists n \geq N : |f(n)| \geq \epsilon$

$\neg (\forall \epsilon > 0, \exists N, \forall n \geq N : |f(n)| < \epsilon)$

$\exists \epsilon > 0 : \neg (\exists N, \forall n \geq N : |f(n)| < \epsilon)$

$\exists \epsilon > 0 : \forall N, \neg (\forall n \geq N, |f(n)| < \epsilon)$

$\exists \epsilon > 0 : \forall N, \exists n \geq N : \neg (|f(n)| < \epsilon)$

$\exists \epsilon > 0 : \forall N, \exists n \geq N : |f(n)| \geq \epsilon$

→ La 2^e proposition est la seule proposition correcte.

1.19. Voici cinq propositions. Laquelle n'est logiquement équivalente à aucune des quatre autres ?

- Si tu triches, j'abandonne le jeu.
- Tu triches et je n'abandonne pas le jeu.
- Si tu ne joues pas honnêtement, j'abandonne le jeu.
- Tu ne triches pas ou j'abandonne le jeu.
- Si je continue à jouer, alors tu ne triches pas.

• $T \rightarrow A$

$T \wedge \neg A$

Ne peuvent être vraies
en même temps

• $T \rightarrow A$

$\neg T \vee A$

$\neg A \rightarrow \neg T$

Fausse uniquement si
T et $\neg A$ sont vraies en même temps

contra-
posée



Racines



2.2 Ci-dessous, on suppose $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$.

Simplifier

b. $\frac{\sqrt[4]{64a^6}}{\sqrt[4]{162a}}$

important pour les condit° d'existence

- Racine n° avec n pair
→ $a \geq 0$
- dénominateur → $a \neq 0$

① Décomposition en facteurs premiers

$$\begin{array}{r|l} 64 & 2 \\ 32 & 2 \\ 16 & 2 \\ 8 & 2 \\ 4 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & \end{array}$$

$$\Rightarrow 64 = 2^6$$

$$\begin{array}{r|l} 162 & 2 \\ 81 & 3 \\ 27 & 3 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

$$\Rightarrow 162 = 2 \cdot 3^4$$

$$\frac{\sqrt[4]{64a^6}}{\sqrt[4]{162a}} = \frac{\sqrt[4]{2^4 \cdot 2^2 \cdot a^4 \cdot a^2}}{\sqrt[4]{2 \cdot 3^4 \cdot a}}$$

$$= \frac{2|a| \sqrt[4]{2^2 \cdot a^2}}{3 \sqrt[4]{2a}}$$

en général : $\sqrt[2k]{a^{2k}} = |a|$ ($k \in \mathbb{N}_0$)

ici, $a > 0$ donc $|a| = a$

$$= \frac{2a}{3} \sqrt[4]{\frac{2^2 a^2}{2a}}$$

$$= \frac{2a \sqrt[4]{2a}}{3}$$

Coefficients binomiaux
& binôme de Newton

COEFFICIENTS BINOMIAUX

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! (n-k)!}$$

FORMULE DU BINÔME DE NEWTON

$$(x-y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} (-y)^k$$

2.8. Développer $(1-1)^n$ et en déduire une propriété des coefficients binomiaux.

$$(1-1)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 1^{n-k} (-1)^k$$

formule du binôme
de Newton $(x=1, y=-1)$

$$= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \underbrace{(-1)^k}_{\substack{(-1) \text{ si } k \text{ impair} \\ 1 \text{ si } k \text{ pair}}}$$

$$= \sum_{\substack{0 \leq k \leq n \\ \text{pair}}} \binom{n}{k} - \sum_{\substack{0 \leq k \leq n \\ \text{impair}}} \binom{n}{k}$$

$\Rightarrow$ La somme des coefficients binomiaux $\binom{n}{k}$ pour k pair est égale à la somme des coefficients binomiaux $\binom{n}{k}$ pour k impair.

Ex: $n=4$: $\binom{4}{0} + \binom{4}{2} + \binom{4}{4} = \binom{4}{1} + \binom{4}{3}$



Récurrence



2.9. Démontrez par récurrence (pour n un nombre naturel) :

a. $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

b. $1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

Remarquons qu'ici n représente un naturel non-nul.

Montrons par récurrence que $1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$, $\forall n \in \mathbb{N}_0$.

Cas de base vérifions que la propriété est vraie pour $n=1$:

$$\frac{1^2(1+1)^2}{4} = \frac{1 \cdot 2^2}{4} = \frac{4}{4} = 1 = 1^3.$$

Le cas de base est vérifié.

Hypothèse de récurrence

Supposons que la propriété soit vraie pour un certain naturel N ,
c'est-à-dire que $1^3 + 2^3 + \dots + N^3 = \frac{N^2(1+N)^2}{4}$.

Récurrence / Hérité Montrons que la propriété est vraie pour $N+1$:

$$\begin{aligned} & 1^3 + 2^3 + \dots + N^3 + (N+1)^3 \\ = & \frac{N^2(N+1)^2}{4} + (N+1)^3 \end{aligned}$$

par hypothèse de récurrence

$$= \frac{N^2(N+1)^2 + 4(N+1)^3}{4}$$

par mise en évidence

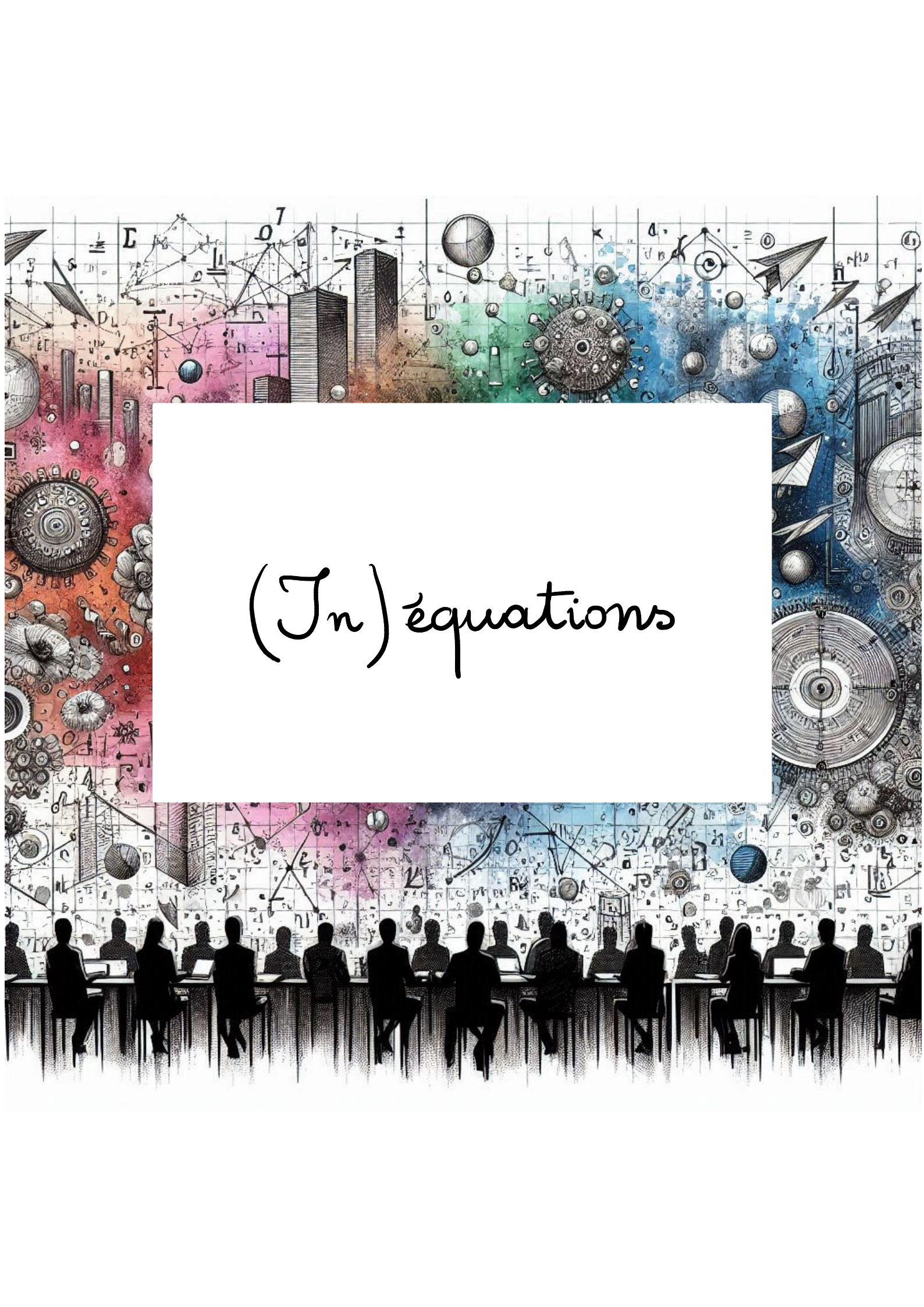
$$= \frac{(N+1)^2 \cdot (N^2 + 4(N+1))}{4}$$

$$= \frac{(N+1)^2 (N^2 + 4N + 4)}{4}$$

par factorisation

$$= \frac{(N+1)^2 (N+2)^2}{4}$$

$\Rightarrow$ La propriété est vraie pour $N+1$,
ce qui conclut la preuve par récurrence. $\square$



(I_n) équations

EQUATION

$$-4x + \frac{3}{2} = 12$$

↑
inconnue

↑
égalité,
signe '='

INÉQUATION

$$-4y + 12 > \frac{1}{3}$$

↑
inconnue

↑
inégalité,
signe '>', '≥', '<', '≤'.

⚠ Le sens de l'inégalité change lorsqu'on multiplie par quelque chose de négatif

CONDITIONS D'EXISTENCE

* fractions → dénominateur non-nul

* racines n^e → radicande positif
(n pair)

SOLUTIONS

* 

$$S = \{a, b, c, d\}$$

(ordonné du
+ petit au + grand)

* 

$$S =]a, b[\cup [c, d]$$

2.11. Trouver les valeurs réelles x telles que

c. $\frac{x^2-3x}{x+2} = 0$

e. $x^3 - 5x^2 = -6x$

g. $\left| \frac{x-1}{5x+2} \right| = 3$

c) CE: $x+2 \neq 0$
 $\Leftrightarrow x \neq -2$

$$\frac{x^2-3x}{x+2} = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 3x = 0$$

$$\Leftrightarrow x(x-3) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = 3$$

$$S = \{0, 3\}$$

factorisation
(mise en évidence)

e) CE: ✓

$$x^3 - 5x^2 = -6x$$

$$\Leftrightarrow x^3 - 5x^2 + 6x = 0$$

$$\Leftrightarrow x(x^2 - 5x + 6) = 0$$

discriminant (Δ)
ou somme et produit

$$\Leftrightarrow x(x-2)(x-3) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = 2 \text{ ou } x = 3$$

$$S = \{0, 2, 3\}$$

x en évidence

g) CE: $5x+2 \neq 0$
 $5x \neq -2$
 $x \neq -2/5$

$$\left| \frac{x-1}{5x+2} \right| = 3$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-1}{5x+2} = 3 \quad \text{ou} \quad \frac{x-1}{5x+2} = -3$$

① $x-1 = 3(5x+2)$
 $x-1 = 15x+6$
 $-1-6 = 15x-x$
 $-7 = 14x$
 $-\frac{7}{14} = x$
 $x = -1/2$

② $x-1 = -3(5x+2)$
 $x-1 = -15x-6$
 $x+15x = -6+1$
 $16x = -5$
 $x = -5/16$

$$S = \left\{ -\frac{1}{2}, -\frac{5}{16} \right\}$$

2.12 Trouver les valeurs réelles x telles que

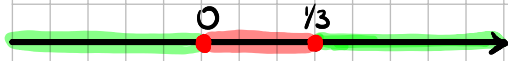
a. $\frac{1}{x} < 3$

g. $\left| \frac{x-1}{5x+2} \right| > 3$

c. $\frac{x^2-3x}{x+2} > 0$

a) CE: $x \neq 0$

$\frac{1}{x} < 3 \cdot x$
 $\hookrightarrow$ change selon le signe de x



① si $x > 0$:
 $1 < 3x$
 $\frac{1}{3} < x$

② si $x < 0$:
 $1 > 3x$
 $\frac{1}{3} > x$

$\rightarrow$ toujours vrai si $x < 0$

$S =]-\infty, 0[\cup]\frac{1}{3}, +\infty[$

c) CE: $x \neq -2$

$\frac{x^2-3x}{x+2} > 0$

$\Leftrightarrow \frac{x(x-3)}{x+2} > 0$

tableau de signes

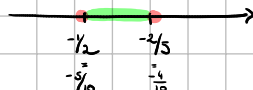
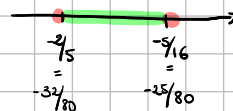
$S =]-2, 0[\cup]3, +\infty[$

	$-\infty$	-2	0	3	$+\infty$
x	-	-	0	+	+
$x-3$	-	-	-	0	+
$x+2$	-	0	+	+	+
T	-	-	+	0	+

— CE — — —

g) CE: $x \neq -\frac{2}{5}$

$$\left| \frac{x-1}{5x+2} \right| > 3$$

		$-\frac{2}{5}$		1	
$x-1$	-	-	-	0	+
$5x+2$	-	0	+	+	+
$\frac{+(x-1)}{+(5x+2)} > 3$ $x-1 < 3(5x+2)$ $-1-6 < 15x-x$ $-7 < 14x$ $-\frac{1}{2} < x$ 	$\neq$	$\frac{-(x-1)}{5x+2} > 3$ $-x+1 > 3(5x+2)$ $1-6 > 15x+x$ $-\frac{5}{6} > x$ 	$\frac{x-1}{5x+2} > 3$ $x-1 > 3(5x+2)$ $-1-6 > 15x-x$ $-\frac{1}{2} > x$ ↓ <u>Non</u> car $x > 1$		

$$S =]-\frac{1}{2}; -\frac{2}{5}[\cup]-\frac{2}{5}; -\frac{5}{16}[$$

$$\text{ou } S =]-\frac{1}{2}; -\frac{5}{16}[\setminus \{-\frac{2}{5}\}$$

