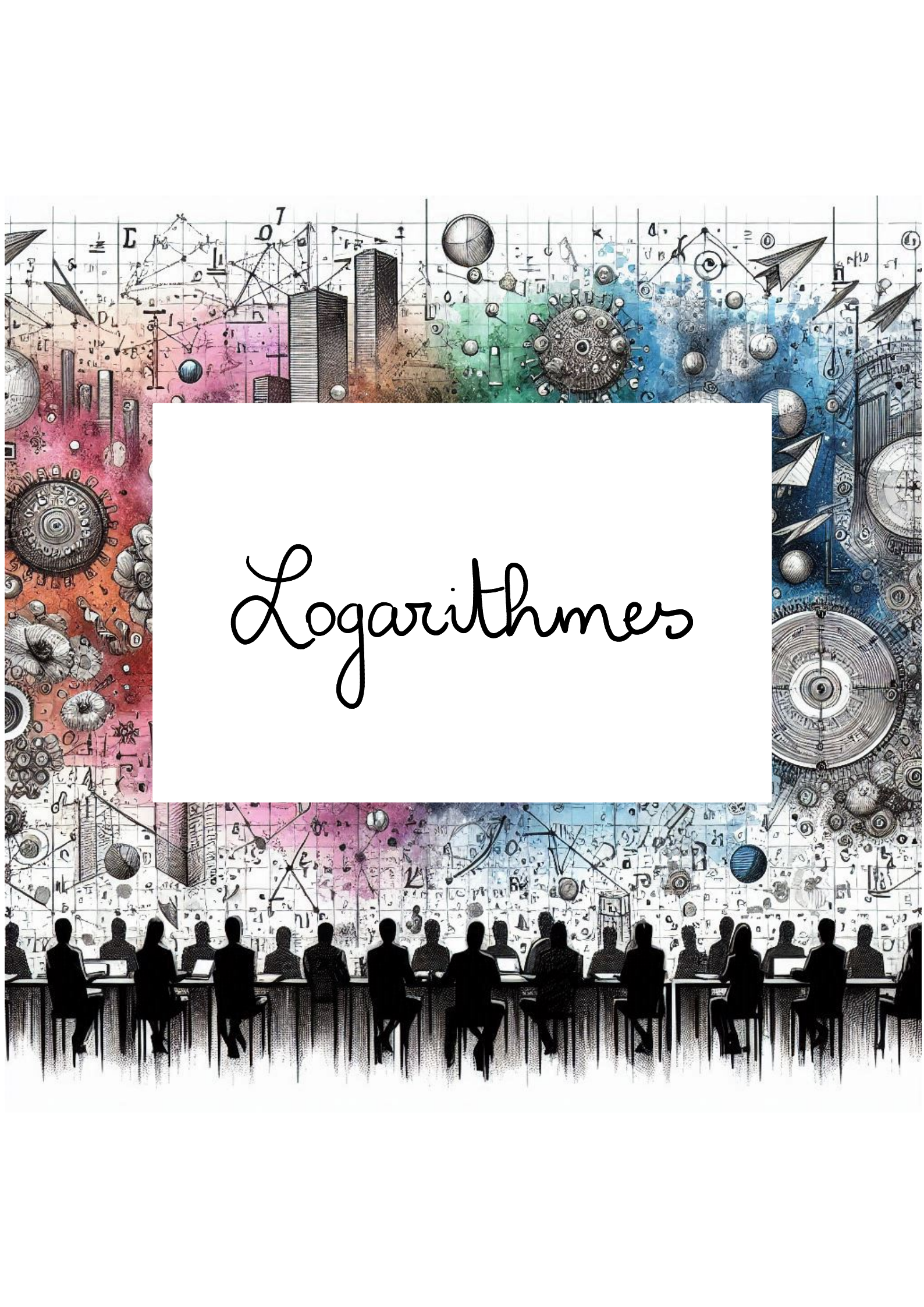




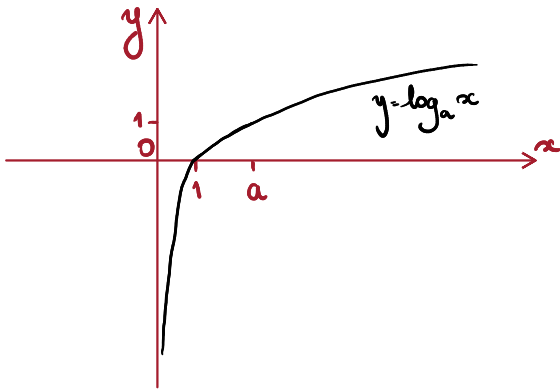
Logarithmes



LOGARITHMES

$$\log_a b = c \iff a^c = b$$

base l'exposant qu'il faut donner à a pour obtenir b .



CONDITIONS D'EXISTENCE

$$a > 0, a \neq 1$$

$$b > 0$$

PROPRIÉTÉS (sous les bonnes conditions d'existence)

$$\log_a (bd) = \log_a b + \log_a d$$

$$\log_a (b/d) = \log_a b - \log_a d$$

$$\log_a (b^d) = d \log_a b$$

$$\log_a b = \frac{\log_d b}{\log_d a} = \frac{1}{\log_b a}$$

4.1. Calculer sans faire usage de tables ou de machines :

b. $\log_3(27)$;

e. $\log_8(16)$;

b) $3^? = 27$

$$\log_3 27 = 3$$

e) $8^? = 16$

$$\log_8 16 = \frac{\log_2 16}{\log_2 8} = \frac{\log_2 2^4}{\log_2 2^3}$$

$$= \frac{4}{3}$$

4.2. Calculer x tel que

b. $\log_x 8 = -1.5$

CE : $x > 0, x \neq 1$

$$\log_x 8 = -1.5 = -\frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow \left(x^{-\frac{3}{2}}\right)^{\frac{2}{3}} = (8)^{-\frac{2}{3}}$$

$$\Leftrightarrow x = 2^{-2} = \frac{1}{4}$$

L'ensemble des solutions est $S = \left\{ \frac{1}{4} \right\}$

4.5. Calculer en fonction de $a = \log_{10} 2$:

a. $\log_{10} 5$;

$$= \log_{10} \frac{10}{2} = \log_{10} 10 - \log_{10} 2 = 1 - a$$

4.9. Résoudre les équations suivantes :

b. $\log x + \log(x^2 + 2x - 1) = \log 2$;

c. $\log_5(5^x - 7) = \log_{25} 324 + 2 - x$;

b) CE: $x > 0$ et $x^2 + 2x - 1 > 0$

$$\log x + \log(x^2 + 2x - 1) = \log 2$$

$$\Leftrightarrow \log x(x^2 + 2x - 1) = \log 2$$

$$\Leftrightarrow x(x^2 + 2x - 1) = 2$$

$$\Leftrightarrow x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x^2 + 3x + 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x+1)(x+2) = 0$$

$x=1$ est une solution.
Horner / division euclidienne:

1	2	-1	-2
1	1	3	2
1	3	2	0

$\rightarrow x=1$ ou $x=-1$ ou $x=-2$
 $1^2 + 2 \cdot 1 - 1 = 2 > 0$ impossible car $x > 0$
 CE: OK

L'ensemble des solutions est $S = \{1\}$.

c) CE: $5^x - 7 > 0$

$$\log_5(5^x - 7) = \log_{25} 324 + 2 - x$$

$$\Leftrightarrow \log_5(5^x - 7) = \frac{\log_5 324}{\log_5 25} + \log_5 5^{2-x}$$

$$\Leftrightarrow \log_5(5^x - 7) = \frac{1}{2} \log_5 324 + \log_5 5^{2-x}$$

$$\Leftrightarrow \log_5(5^x - 7) = \log_5 324^{1/2} \cdot 5^{2-x}$$

$$\Leftrightarrow 5^x - 7 = 18 \cdot 5^{2-x}$$

$$\Leftrightarrow 5^x - 7 = \frac{18 \cdot 25}{5^x}$$

$$\Leftrightarrow (5^x)^2 - 7(5^x) - 18 \cdot 25 = 0$$

On pose $t = 5^x$
On a alors

$$t^2 - 7t - 18 \cdot 25 = 0$$

$$\Leftrightarrow (t+18)(t-25) = 0$$

$$t = -18 \text{ ou } t = 25$$

impossible car $t = 5^x > 0$
 $25 = 5^x$
 $x = 2$

$\rightarrow$ CE: $5^2 - 7 = 25 - 7 > 0$: OK.

L'ensemble des solutions est $S = \{2\}$

4.12. Résoudre les équations exponentielles suivantes :

b. $3^{2x+1} + 9^x = 324$

$$b) \quad 3^{2x+1} + 9^x = 324$$

$$\Leftrightarrow 3 \cdot 9^x + 9^x = 18^2$$

$$\Leftrightarrow 4 \cdot 9^x = (2 \cdot 9)^2$$

$$\Leftrightarrow 9^x = 9^2$$

L'ensemble des solutions est $S = \{2\}$

4.13. Résoudre l'équation suivante pour $x \in \mathbb{R}$:

$$e^{2x} - 2e^x + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (e^x)^2 - 2e^x + 1 = 0$$

On pose $y = e^x$. On résout l'équation

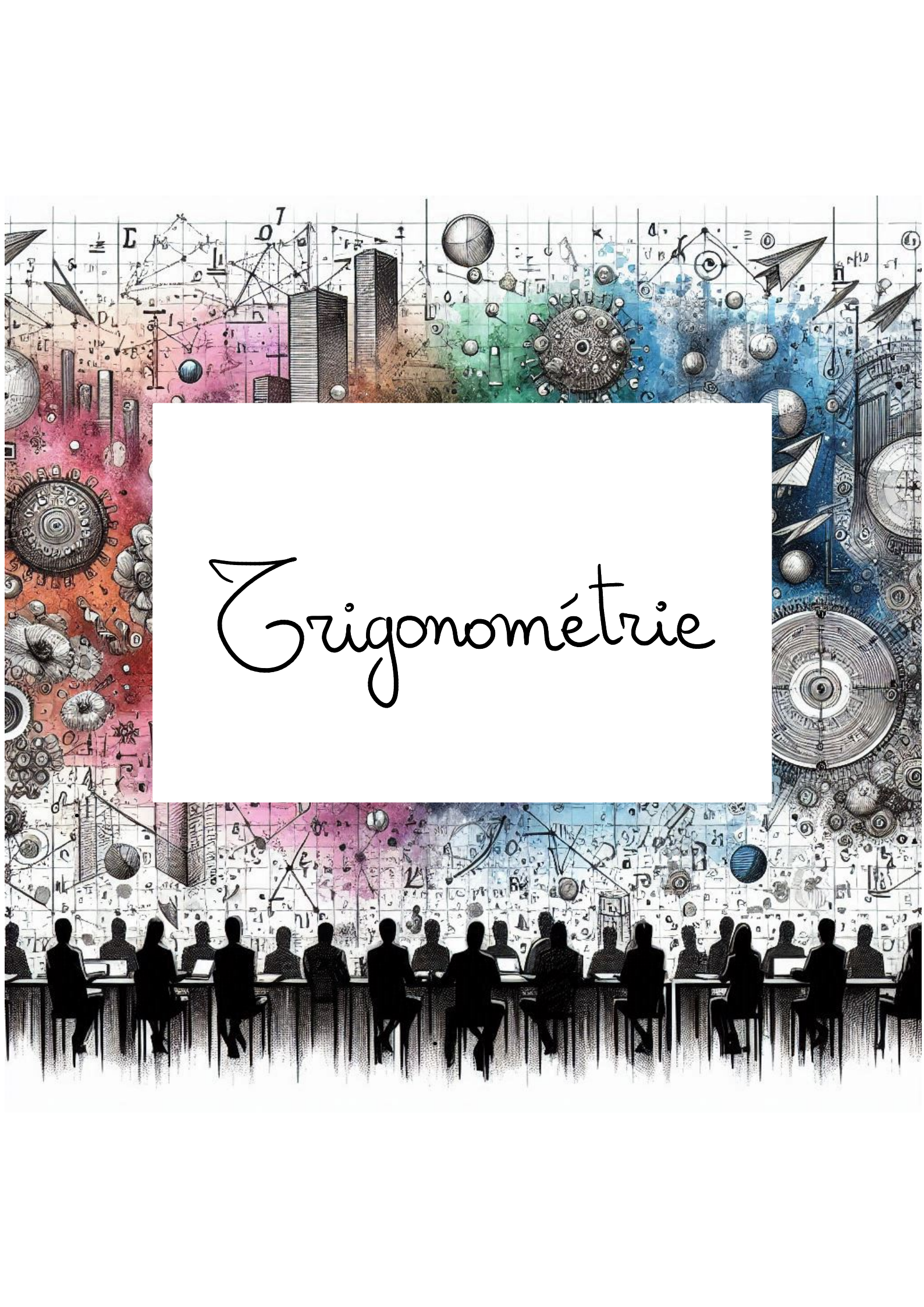
$$y^2 - 2y + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (y-1)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow y = 1$$

On a donc $e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$

L'ensemble des solutions est $S = \{0\}$

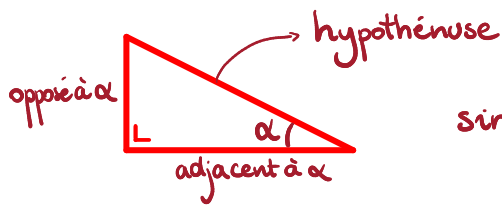


Trigonométrie

ANGLES

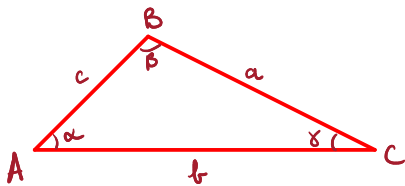
$$1 \text{ tour} = 360^\circ = 2\pi \text{ radians}$$

DANS UN TRIANGLE RECTANGLE



$$\sin \alpha = \frac{\text{opp} \alpha}{\text{hyp}} ; \quad \cos \alpha = \frac{\text{adja}}{\text{hyp}} ; \quad \text{tg} \alpha = \frac{\text{opp} \alpha}{\text{adja}}$$

DANS UN TRIANGLE QUELCONQUE



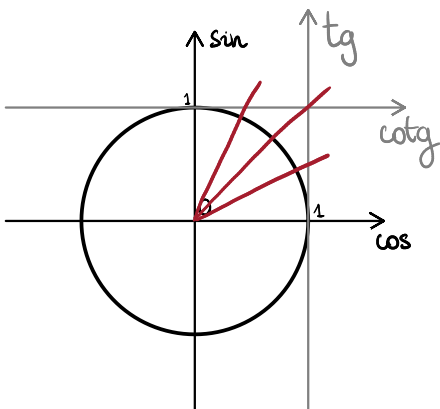
$$\text{Loi des sinus: } \frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$$

FORMULES ELEMENTAIRES

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\text{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

CERCLE TRIGONOMETRIQUE & VALEURS PARTICULIERES



α	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tg	0	$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\nexists$
cotg	$\nexists$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

RELATIONS ENTRE LES ANGLES

$$* \beta + \alpha = \pi$$

supplémentaires

$$* \beta - \alpha = \pi$$

anti-supplémentaires

$$* \beta = -\alpha$$

opposés

$$* \beta + \alpha = \frac{\pi}{2}$$

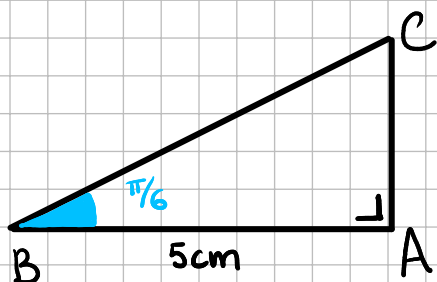
complémentaires

5.1. Quelle est la mesure en degrés d'un angle de $\frac{\pi}{10}$ radians ? À quelle fraction d'un tour complet cet angle correspond-il ?

$$\begin{aligned} 2\pi &= 360^\circ = 1 \text{ tour} \\ \frac{1}{20} \cdot 2\pi &= \frac{\pi}{10} = \frac{360^\circ}{20} = 18^\circ = \frac{1}{20} \text{ tour.} \end{aligned}$$

Un angle de $\frac{\pi}{10}$ radians mesure 18° et correspond à $\frac{1}{20}$ de tour.

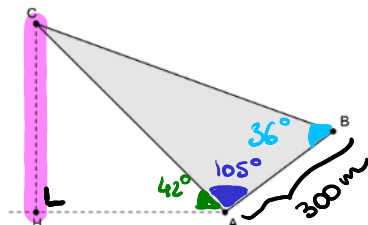
5.2. Soit ABC un triangle rectangle en A . On donne $AB = 5 \text{ cm}$, et $\hat{B} = \frac{\pi}{6} \text{ rad}$. Représenter la situation, et déterminer les longueurs AC et BC .



$$\begin{aligned} * \quad \frac{\sqrt{3}}{2} &= \cos \frac{\pi}{6} = \cos \hat{B} = \frac{|AB|}{|BC|} = \frac{5}{|BC|} \\ \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} &= \frac{5}{|BC|} \quad \Leftrightarrow |BC| = \frac{5 \cdot 2}{\sqrt{3}} = \frac{10}{\sqrt{3}} \sqrt{3} \\ * \quad |BC|^2 &= |AB|^2 + |AC|^2 \quad \Leftrightarrow \frac{100}{3} = 25 + |AC|^2 \\ \Leftrightarrow \frac{225}{3} &= |AC|^2 \quad \Leftrightarrow \frac{15}{\sqrt{3}} = 5\sqrt{3} = |AC| \end{aligned}$$

Les côtés AB , BC et AC mesurent respectivement 5 cm , $\frac{10\sqrt{3}}{3} \text{ cm}$ et $5\sqrt{3} \text{ cm}$.

5.6. Sur la figure, on donne les angles $\widehat{CAH} = 42^\circ$, $\hat{A} = 105^\circ$, $\hat{B} = 36^\circ$ et $AB = 300 \text{ m}$. On demande de déterminer la longueur CH sachant que l'angle dessiné en H est droit.



① Angles: $\hat{ACB} = 180^\circ - 105^\circ - 36^\circ = 39^\circ$ et $\hat{ACH} = 180^\circ - 90^\circ - 42^\circ = 48^\circ$

② Dans le triangle ABC : $\frac{\sin \hat{B}}{|AC|} = \frac{\sin \hat{C}}{|AB|}$ par la règle des sinus

$$\Leftrightarrow |AC| = \frac{\sin 36^\circ}{\sin 39^\circ} \cdot 300 \text{ m}$$

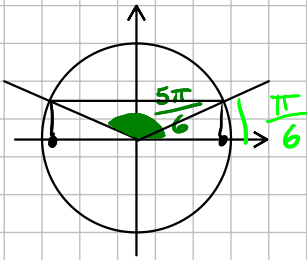
③ Dans le triangle AHC : $\sin \hat{A} = \frac{|CH|}{|AC|}$ par la formule du sinus dans un triangle rect.

la longueur CH vaut: $|CH| = \sin 42^\circ \cdot \frac{\sin 36^\circ}{\sin 39^\circ} \cdot 300 \text{ m}$

5.8. À l'aide du cercle trigonométrique, déterminer les nombres suivants (valeur exacte) en utilisant les symétries adéquates.

a. $\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)$

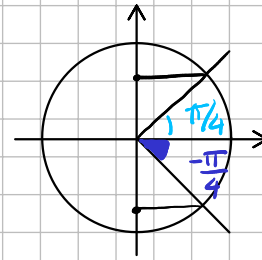
b. $\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$



$$\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -\cos\frac{\pi}{6}$$

(angles supplémentaires)

$$= -\frac{\sqrt{3}}{2}$$



$$\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\sin\frac{\pi}{4}$$

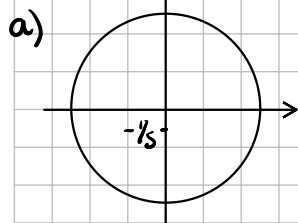
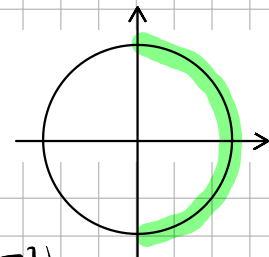
(angles opposés)

$$= -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

5.13. Soit $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

a. Si $\sin x = -\frac{1}{5}$, que vaut la tangente de x ?

b. Si $\cos x = \frac{1}{3}$, quelles sont les valeurs possibles de la tangente de x ?



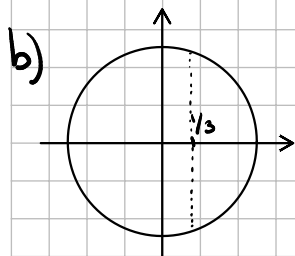
$$\sin x = -\frac{1}{5}, \quad \cos x \geq 0 \quad (\text{car } x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right])$$

$$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$$

$$\Rightarrow \cos x = \sqrt{1 - \frac{1}{25}} = \frac{\sqrt{24}}{5} = \frac{2\sqrt{6}}{5}$$

$$\Rightarrow \tan x = \frac{-1/5}{2\sqrt{6}/5} = \frac{-1}{2\sqrt{6}} = \frac{-\sqrt{6}}{12}$$

la tangente de x vaut $\frac{\sqrt{6}}{12}$



$$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$$

$$\Rightarrow \sin x = \pm \sqrt{1 - \frac{1}{9}} = \pm \frac{\sqrt{8}}{3} = \pm \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\Rightarrow \tan x = \frac{\pm 2\sqrt{2}/3}{1/3} = \pm 2\sqrt{2}$$

la tangente de x vaut $2\sqrt{2}$ ou $-2\sqrt{2}$.

