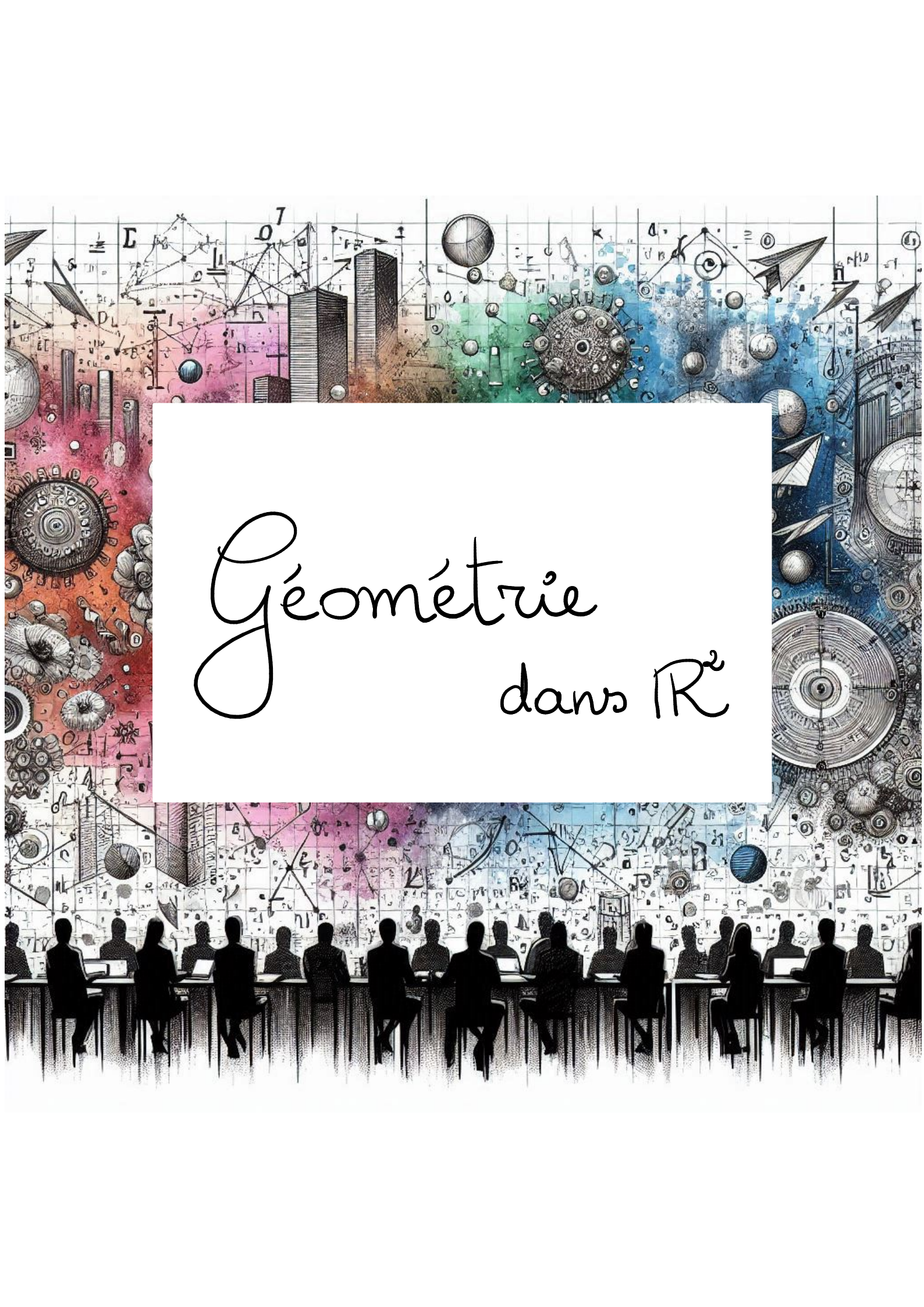




# Géométrie dans $\mathbb{R}^2$



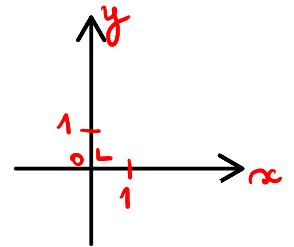
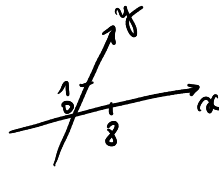
REPÈRE

axes  
+ unités

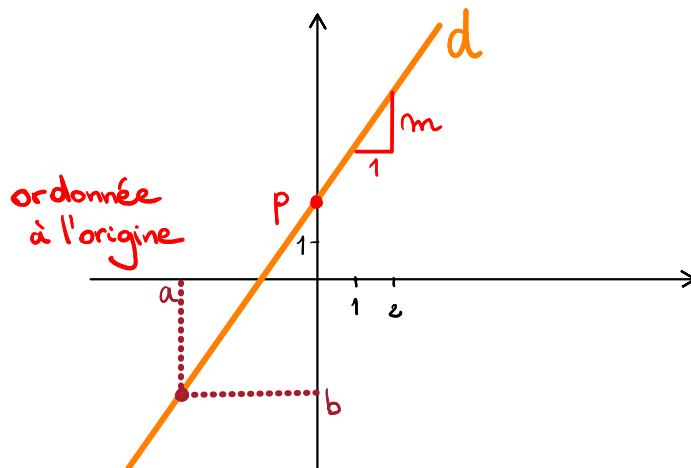
ORTHONORMÉ

⊥

même norme  
pour chaque axe



## DROITES DANS LE PLAN



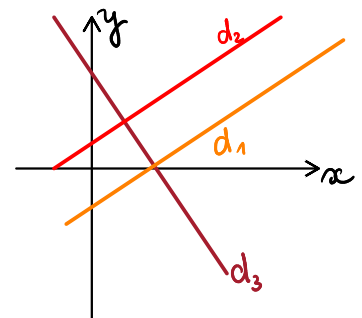
$$d \equiv y = mx + p$$

$\hookrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}$

$$d \equiv y - b = m(x - a)$$

$$d_1 \parallel d_2 \Rightarrow \text{pentes égales : } m_1 = m_2$$

$$d_1 \perp d_3 \Rightarrow \text{pentes inverses et opposées : } m_1 = -\frac{1}{m_3}$$



## EQUATION D'UN CERCLE

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$$

(a, b)  
centre

R  
Rayon

6.1. On donne les points  $a = (1, 2)$ ,  $b = (4, 4)$  et  $c = (4, 3)$  du plan. Déterminer

- les composantes des vecteurs  $\vec{ab}$  et  $\vec{ba}$ ;
- les coordonnées du milieu du segment  $ab$ ;
- les coordonnées du centre de gravité du triangle  $abc$ .

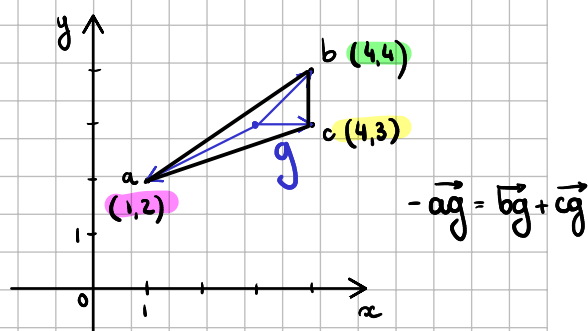
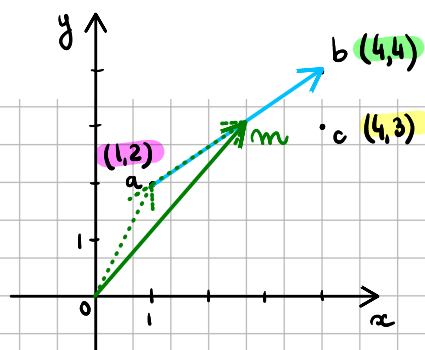
$$\begin{aligned} \text{a. } \vec{ab} &= \vec{ob} - \vec{oa} = (4, 4) - (1, 2) = (3, 2) \\ \vec{ba} &= -\vec{ab} = -(3, 2) = (-3, -2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b. } \vec{om} &= \vec{oa} + \frac{1}{2} \vec{ab} = \vec{oa} + \frac{1}{2} (\vec{ob} - \vec{oa}) \\ &= \frac{1}{2} (\vec{oa} + \vec{ob}) = \left( \frac{1+4}{2}, \frac{2+4}{2} \right) \end{aligned}$$

Le milieu du segment  $[a, b]$  a pour coordonnées  $(\frac{5}{2}, 3)$ .

$$\begin{aligned} \text{c. } \vec{og} &= \frac{1}{3} (\vec{oa} + \vec{ob} + \vec{oc}) \\ &= \left( \frac{1+4+4}{3}, \frac{2+4+3}{3} \right) \\ &= (3, 3) \end{aligned}$$

Le centre de gravité du triangle  $abc$  a pour coordonnées  $(3, 3)$ .

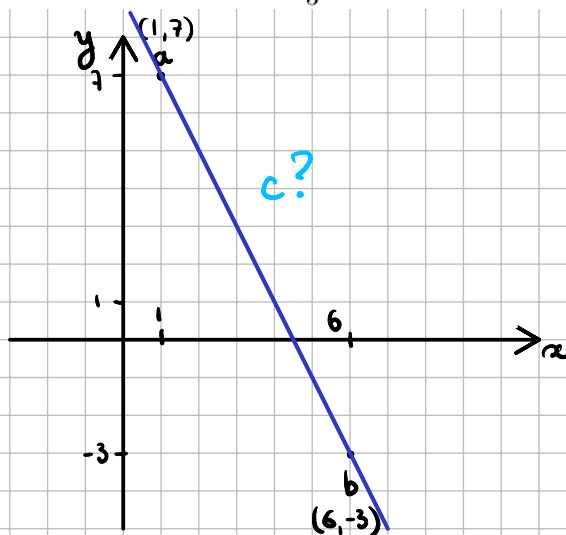


6.3. On donne les points  $a = (1, 7)$  et  $b = (6, -3)$ .

- Déterminer les coordonnées du point  $c$  situé sur la droite  $ab$  et tel que  $\vec{ac} = \frac{2}{3} \vec{cb}$ .

$$\begin{aligned} \vec{ac} &= \frac{2}{3} \vec{cb} \\ \Leftrightarrow \vec{oc} - \vec{oa} &= \frac{2}{3} (\vec{ob} - \vec{oc}) \\ \Leftrightarrow \vec{oc} + \frac{2}{3} \vec{oc} &= \frac{2}{3} \vec{ob} + \vec{oa} \\ \Leftrightarrow \frac{5}{3} \vec{oc} &= \frac{2}{3} \vec{ob} + \vec{oa} \\ \Leftrightarrow \vec{oc} &= \frac{3}{5} \left( \frac{2}{3} \vec{ob} + \vec{oa} \right) \\ \Leftrightarrow \vec{oc} &= \frac{2}{5} \vec{ob} + \frac{3}{5} \vec{oa} \\ \Leftrightarrow \vec{oc} &= \frac{2}{5} (6, -3) + \frac{3}{5} (1, 7) \\ \Leftrightarrow \vec{oc} &= \left( \frac{12}{5}, -\frac{6}{5} \right) + \left( \frac{3}{5}, \frac{21}{5} \right) \\ \Leftrightarrow \vec{oc} &= \left( \frac{15}{5}, \frac{15}{5} \right) = (3, 3) \end{aligned}$$

Les coordonnées du point  $c$  sont  $(3, 3)$ .

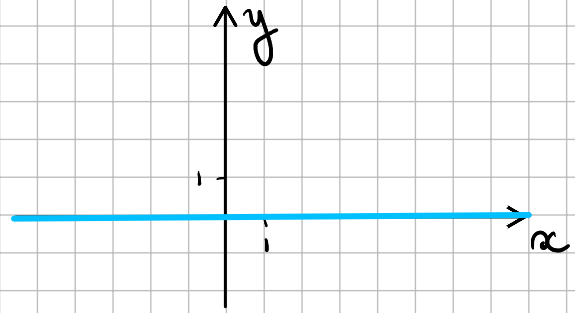


6.5. Dans le plan, donner l'équation des droites suivantes :

a. l'axe  $Ox$ ;

L'axe  $Ox$  a pour équation

$$y = 0$$



e. la droite  $d_1$  qui passe par les points  $(1, 4)$  et  $(-1, 2)$ ;

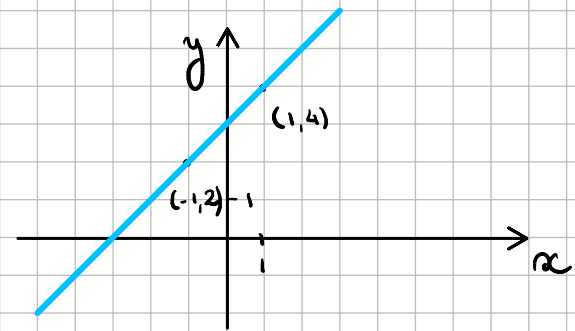
pende :  $\frac{4-2}{1-(-1)} = \frac{2}{2} = 1$

point de la droite:  $(1, 4)$

équation :  $y - y_p = m(x - x_p)$

$$y - 4 = 1(x - 1)$$

$$y = x - 1 + 4$$



La droite  $d_1$  a pour équation  $d_1 \equiv y = x + 3$

g. la droite  $d_2$  parallèle à la droite d'équation  $x + 3y = -4$  qui passe par le point  $(1, 2)$ .

pende : la même que  $x + 3y = -4$

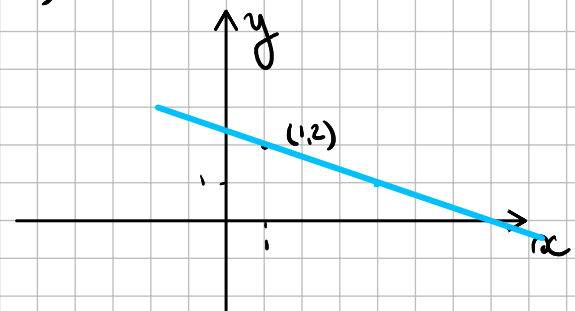
$$x + 3y = -4 \Leftrightarrow y = \frac{1}{3}(-4 - x)$$

$$m = -\frac{1}{3}$$

point :  $(1, 2)$

équation :  $y - 2 = -\frac{1}{3}(x - 1)$

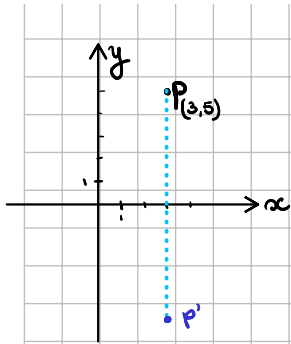
$$\Leftrightarrow y = -\frac{1}{3}x + \frac{1}{3} + 2$$



La droite  $d_2$  a pour équation  $d_2 \equiv y = -\frac{1}{3}x + \frac{7}{3}$

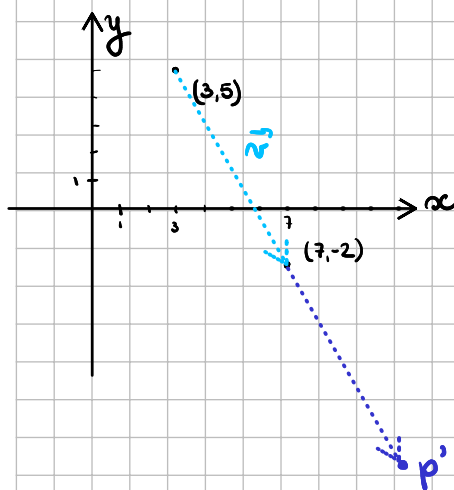
6.9. Soit le point  $p = (3, 5)$  du plan euclidien. Quelles sont les coordonnées des points symétriques de  $p$  par rapport

b. à l'axe  $ox$  ;



Le point symétrique à  $p$  par rapport à l'axe  $Ox$  a pour coordonnées  $(3, -5)$

d. au point  $(7, -2)$  ;



$$\vec{r} : (7, -2) - (3, 5) = (4, -7)$$

$$\vec{op'} : \vec{op} + 2\vec{r} = (7, -2) + \vec{r} = (11, -9)$$

Le point symétrique à  $p$  par rapport au point  $(7, -2)$  est  $(11, -9)$ .

6.15. Déterminer le centre et le rayon du cercle d'équation

$$x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0. \quad \Leftrightarrow (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

$$x^2 - 4x + ? = (x-a)^2$$

$$x^2 - 2 \cdot 2x + 2^2 = (x-2)^2$$

$$y^2 - 6y + ? = (y-b)^2$$

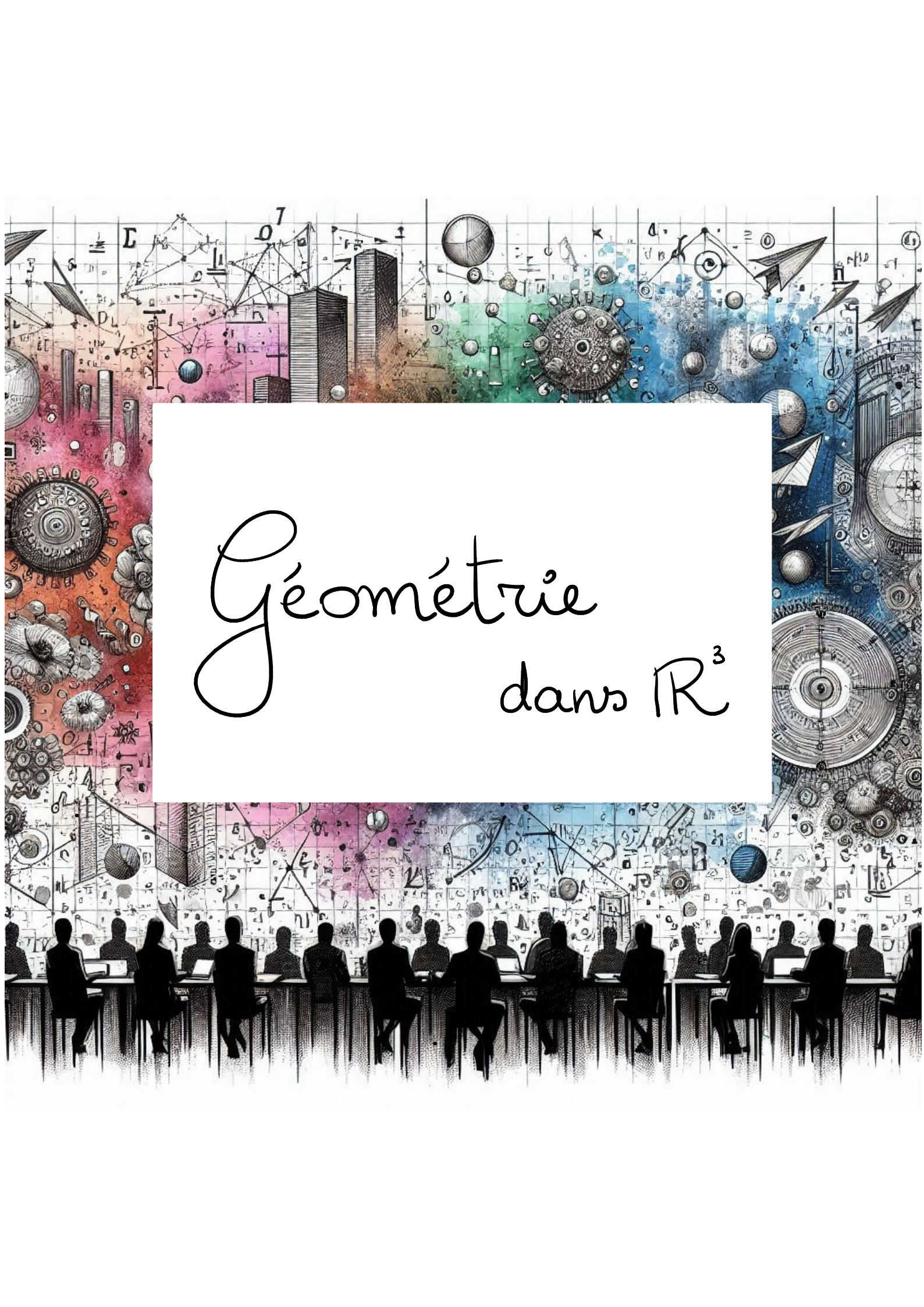
$$y^2 - 2 \cdot 3y + 3^2 = (y-3)^2$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 - 4x - 6y - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 4x + 4) + (y^2 - 6y + 9) - 3 = 4 + 9$$

$$\Leftrightarrow (x-2)^2 + (y-3)^2 = 16$$

Le centre du cercle est  $(2, 3)$  et son rayon est  $4$ .



# Géométrie dans $\mathbb{R}^3$

**NORME**  $\| (x, y, z) \| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \rightarrow$  longueur du vecteur

**PRODUIT \* SCALAIRE** •  $\langle (x_a, y_a, z_a), (x_b, y_b, z_b) \rangle = x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b$

•  $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \cos \alpha$   
 angle entre  $\vec{a}$  et  $\vec{b}$

**\* VECTORIEL**

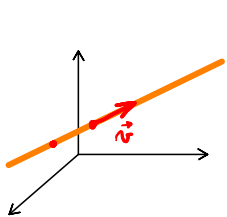
$$(x_a, y_a, z_a) \times (x_b, y_b, z_b) = \begin{vmatrix} x_a & x_b & u_x \\ y_a & y_b & u_y \\ z_a & z_b & u_z \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} x_a & x_b & u_x \\ y_a & \cancel{y_b} & \cancel{u_y} \\ z_a & z_b & u_z \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x_a & x_b & u_x \\ \cancel{y_a} & \cancel{y_b} & \cancel{u_y} \\ z_a & z_b & u_z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_a & \cancel{x_b} & \cancel{u_x} \\ y_a & \cancel{y_b} & \cancel{u_y} \\ \cancel{z_a} & \cancel{z_b} & \cancel{u_z} \end{vmatrix}$$

$$= (y_a z_b - z_a y_b, z_a x_b - x_a z_b, x_a y_b - y_a x_b)$$

## EQUATIONS DANS $\mathbb{R}^3$

**\* D'UNE DROITE d**



$\vec{r}$  vecteur directeur

$(a, b, c)$  point de la droite

$$(x, y, z) = (a, b, c) + \vec{r} \Leftrightarrow \begin{cases} x = a + r_x \cdot t \\ y = b + r_y \cdot t \\ z = c + r_z \cdot t \end{cases}$$

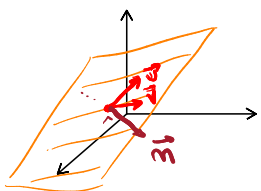
vectorielle

paramétriques

$$\Leftrightarrow \frac{x-a}{r_x} = \frac{y-b}{r_y} = \frac{z-c}{r_z}$$

cartésienne

**\* D'UN PLAN  $\pi$**



$\vec{u}, \vec{v}$  vecteurs directeurs

$(a, b, c)$  point du plan

$\vec{n}$  vecteur normal

$$(x, y, z) = (a, b, c) + \vec{u} + \vec{v} \Leftrightarrow \begin{cases} x = a + u_x t + v_x \lambda \\ y = b + u_y t + v_y \lambda \\ z = c + u_z t + v_z \lambda \end{cases} \Leftrightarrow n_x(x-a) + n_y(y-b) + n_z(z-c) = 0$$

vectorielle

paramétriques

cartésienne

6.19. Dans l'espace euclidien  $\mathbb{R}^3$ , on donne les vecteurs  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$  de composantes respectives  $(1, 2, 3)$ ,  $(0, 3, -4)$  et  $(2, 2, -2)$ . On demande

- la longueur de  $\vec{v}_2$ ;
- l'angle entre  $\vec{v}_1$  et  $\vec{v}_3$ ;
- le produit vectoriel  $\vec{v}_2 \times \vec{v}_3$ .

a.  $\|\vec{v}_2\| = \sqrt{0^2 + 3^2 + (-4)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$

La longueur de  $\vec{v}_2$  est 5.

b.  $\alpha := \text{angle entre } \vec{v}_1 \text{ et } \vec{v}_3$

$$x_1 x_3 + y_1 y_3 + z_1 z_3 = \langle \vec{v}_1, \vec{v}_3 \rangle = \|\vec{v}_1\| \cdot \|\vec{v}_3\| \cdot \cos \alpha$$

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot (-2) = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} \sqrt{2^2 + 2^2 + (-2)^2} \cos \alpha$$

$$0 = \sqrt{14} \cdot \sqrt{64} \cos \alpha$$

$$\arccos(0) = \alpha$$

$$\alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

L'angle entre  $\vec{v}_1$  et  $\vec{v}_3$  est  $\frac{\pi}{2}$ .

c.  $\vec{v}_2 \times \vec{v}_3 = \begin{vmatrix} 0 & 2 & u_x \\ 3 & 2 & u_y \\ -4 & -2 & u_z \end{vmatrix}$

$$= (0-6)u_z + (-6-(-8))u_x - (0-(-8))u_y$$

$$= 2u_x - 8u_y - 6u_z = (2, -8, -6)$$

Le produit vectoriel de  $\vec{v}_2$  et  $\vec{v}_3$  est  $(2, -8, -6)$ .

6.25. Dans  $\mathbb{R}^3$ , quelle est l'équation cartésienne

e. passant par les points  $(2, 0, 0)$ ,  $(0, 6, 0)$  et  $(0, 0, 5)$ ;

vecteurs directeurs  $\vec{v}_1 = (2, -6, 0)$

$\vec{v}_2 = (2, 0, -5)$

vecteur normal  $\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = \begin{vmatrix} 2 & 2 & u_x \\ -6 & 0 & u_y \\ 0 & -5 & u_z \end{vmatrix} = (+30, +10, +12)$

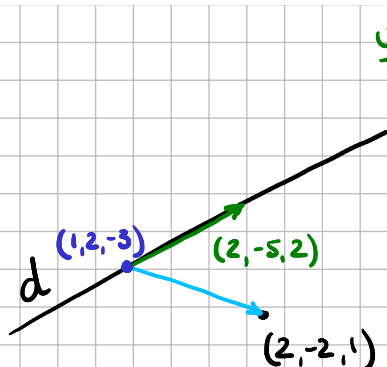
$\vec{n} = (15, 5, 6)$

équation  $15(x-2) + 5(y-0) + 6(z-0) = 0$

L'équation du plan est  $15x + 5y + 6z = 30$

6.29. Quelle est l'équation du plan de  $\mathbb{R}^3$  qui passe par le point  $a = (2, -2, 1)$  et qui contient la droite  $D$  d'équations paramétriques

$$\begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = -5t + 2 \\ z = 2t - 3 \end{cases}$$



un vecteur directeur  $\vec{v}_1$

un point de la droite

$(2, -2, 1)$  n'est pas sur la droite car

$$\begin{cases} 2 = 2t + 1 \\ -2 = -5t + 2 \\ 1 = 2t - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1/2 \\ t = 4/5 \\ t = 2 \end{cases} \text{ impossible}$$

$\vec{v}_2 = (2-1, -2-2, 1+3) = (1, -4, 4)$

vecteur normal  $\begin{vmatrix} 1 & 2 & u_x \\ -4 & -5 & u_y \\ 4 & 2 & u_z \end{vmatrix} = (-8+20, -2+8, -5+8) \rightarrow (4, 2, 1)$

équation  $4(x-1) + 2(y-2) + (z+3) = 0$

L'équation du plan est  $4x + 2y + z = 5$