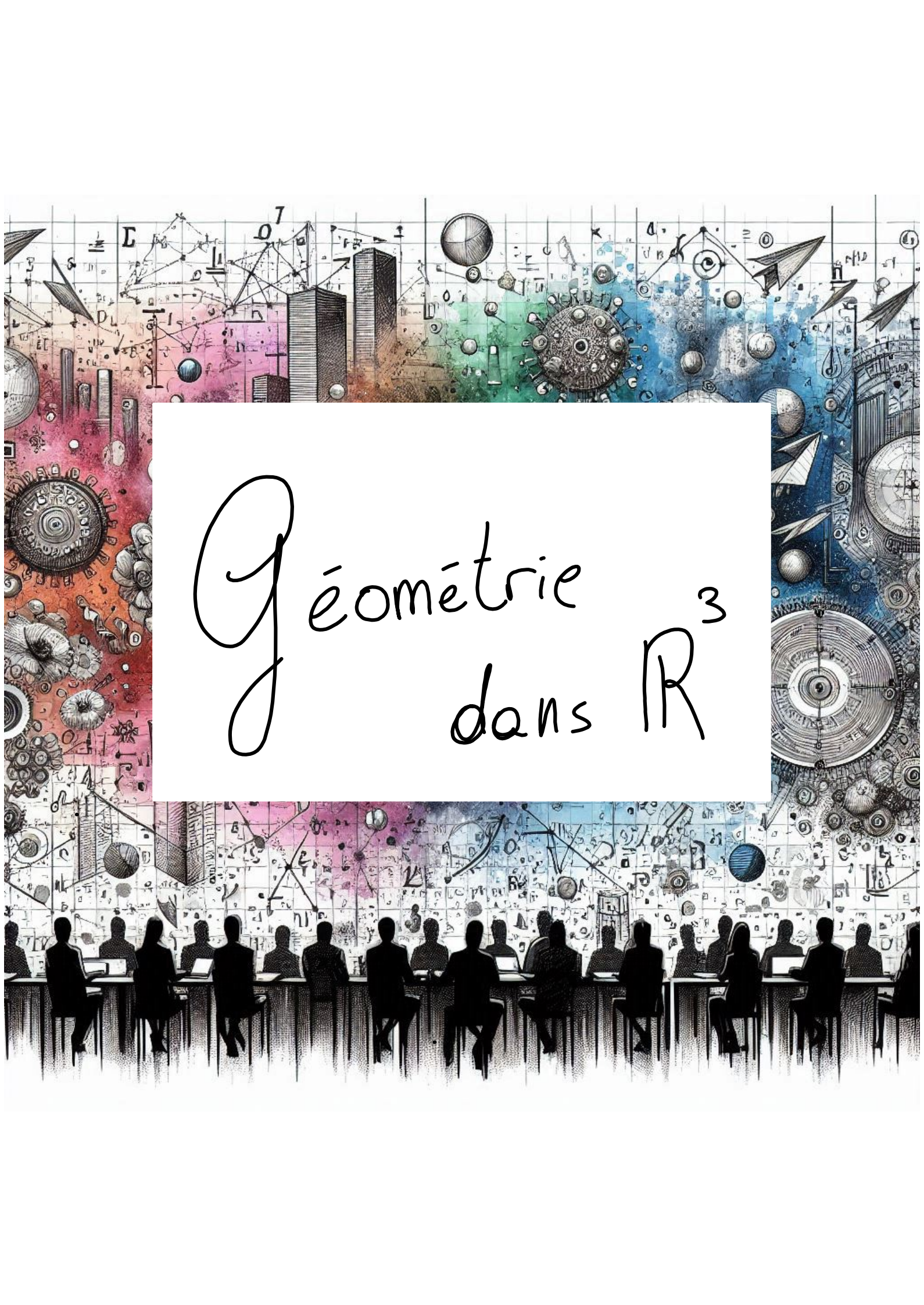




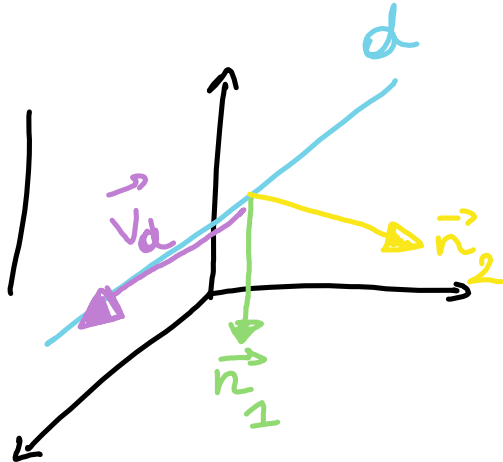
Géométrie dans $\mathbb{R}^3$



Rappels

* Si $d \equiv \begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d = 0 \end{cases}$

alors $\vec{v}_d = \begin{vmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{vmatrix}$

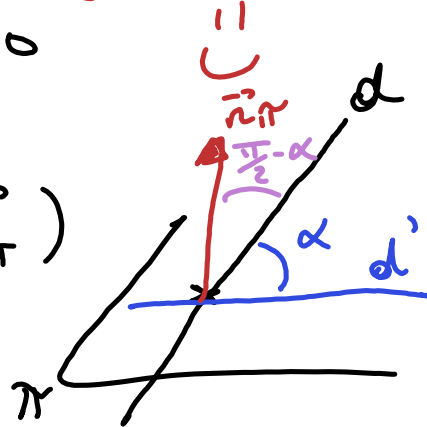


* $\vec{v} \perp \vec{w} \Leftrightarrow \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = 0$

* $\vec{v} \parallel \vec{w} \Leftrightarrow \vec{v} \times \vec{w} = 0$

garime !

* $\angle(d, \pi) = \frac{\pi}{2} - \angle(\vec{v}_d, \vec{n}_\pi)$



3.38. Trouver l'équation du plan de $\mathbb{R}^3$ passant par la droite d'équations

$$\pi \quad d_1 \equiv \begin{cases} x + y - z - 1 = 0 \\ 2x - y + z + 3 = 0 \end{cases}$$

et parallèle à la droite d'équations

$$d_2 \equiv \begin{cases} 5x + 2y - z = 0 \\ x + y + 1 = 0 \end{cases}$$

$\underline{d_1} \subseteq \pi \rightarrow \vec{v}_{d_1}$ est un vecteur directeur de π

$$\vec{v}_{d_1} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & \vec{u}_x \\ 1 & -1 & \vec{u}_y \\ -1 & 1 & \vec{u}_z \end{vmatrix} = (1-1)\vec{u}_x - (1+2)\vec{u}_y + (-1-2)\vec{u}_z = (0, -3, -3)$$

$\underline{\pi // d_2} \rightarrow \vec{v}_{d_2}$ est vecteur directeur de π

$$\vec{v}_{d_2} = \begin{vmatrix} 5 & 1 & \vec{u}_x \\ 2 & 1 & \vec{u}_y \\ -1 & 0 & \vec{u}_z \end{vmatrix} = (0+1)\vec{u}_x - (0+1)\vec{u}_y + (5-2)\vec{u}_z = (1, -1, 3)$$

$\underline{d_1} \subseteq \pi \rightarrow$ Tout point de d_1 est point de π
 . Posons $z=0$: $(x, y, 0) \in d_1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 1 \\ 2x - y = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{2}{3} \\ y = \frac{5}{3} \end{cases}$$

Équation cartésienne $\rightarrow$ vecteur normal

$$\vec{n} = \vec{v}_{d_1} \times \vec{v}_{d_2} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & \vec{u}_x \\ -3 & -1 & \vec{u}_y \\ -3 & 3 & \vec{u}_z \end{vmatrix} = (-12, -3, 3)$$

$$\rightarrow \pi \equiv -12x - 3y + 3z + d = 0, \text{ Or } -12(-\frac{2}{3}) - 3(\frac{5}{3}) + 3 \cdot 0 + d = 0$$

$$\rightarrow \pi \equiv -12x - 3y + 3z - 3 = 0 \quad (\Leftrightarrow 8 - 5 + d = 0 \Leftrightarrow d = -3)$$

3.40. Pour quelle valeur de λ la droite de $\mathbb{R}^3$ d'équations

$$d \equiv \frac{x-3}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-2}{\lambda}$$

est-elle parallèle au plan d'équation $6x - y + 3z - 5 = 0$?

$$d \parallel \pi \Leftrightarrow \vec{v}_d \perp \vec{n}_\pi$$

$$\bullet \vec{v}_d = (2, 3, \lambda)$$

$$\bullet \vec{n}_\pi = (6, -1, 3)$$

$$\vec{v}_d \perp \vec{n}_\pi \Leftrightarrow \langle \vec{v}_d, \vec{n}_\pi \rangle = 0$$

$$\bullet \langle \vec{v}_d, \vec{n}_\pi \rangle = 2 \cdot 6 + 3 \cdot (-1) + 3\lambda = 0$$

$$\Leftrightarrow 9 + 3\lambda = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda = -3$$

$\rightarrow$ d et π sont parallèles si et seulement si $\lambda = -3$.

3.49. Trouver la (ou les) valeur(s) de k pour que le plan de $\mathbb{R}^3$ d'équation $x + ky - 2z - 9 = 0$
 e. fasse un angle de mesure $\pi/3$ avec le plan $2x - 2y + z = 0$;

$$\angle(\pi_1, \pi_2) = \angle(\vec{n}_{\pi_1}, \vec{n}_{\pi_2}) = \frac{\pi}{3}$$

$$\vec{n}_{\pi_1} = (1, k, -2)$$

$$\vec{n}_{\pi_2} = (2, -2, 1)$$

$$\langle \vec{n}_{\pi_1}, \vec{n}_{\pi_2} \rangle = \|\vec{n}_{\pi_1}\| \|\vec{n}_{\pi_2}\| \cos \alpha$$

$$\bullet \langle \vec{n}_{\pi_1}, \vec{n}_{\pi_2} \rangle = 1 \cdot 2 + k(-2) + (-2) \cdot 1 = -2k$$

$$\bullet \|\vec{n}_{\pi_1}\| = \sqrt{1^2 + k^2 + (-2)^2} = \sqrt{5 + k^2}$$

$$\bullet \|\vec{n}_{\pi_2}\| = \sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2} = 3$$

$$\rightarrow -2k = 3 \cdot \sqrt{5 + k^2} \quad \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow 4k^2 = 9(5 + k^2) \quad \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow 16k^2 - 9k^2 = 45 \Leftrightarrow k = \pm \sqrt{\frac{45}{7}} = -3\sqrt{\frac{5}{7}}$$

cette ligne
implique
 $k \leq 0$

3.50. Dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$, on donne les droites D_1 et D_2 d'équations

$$D_1 \equiv x - 3 = -y - 2 = \frac{z}{2}, \quad D_2 \equiv x + 2 = y - 3 = \frac{z + 5}{2}$$

et les plans α et β d'équations

$$\alpha \equiv 2x - 2y + z - 3 = 0, \quad \beta \equiv 3x - y + 2z - 1 = 0$$

On demande de calculer l'angle entre

~~a) D_1 et D_2 ;~~

b) D_1 et α ;

~~c) D_1 et β ;~~

~~d) D_2 et α ;~~

e) D_2 et β ;

~~f) α et β .~~

$$\angle(D_1, \alpha) = \frac{\pi}{2} - \underbrace{\angle(\vec{v}_{D_1}, \vec{n}_\alpha)}_x$$

$$\bullet \vec{v}_{D_1} = (1, -1, 2)$$

$$\bullet \vec{n}_\alpha = (2, -2, 1)$$

$$\langle \vec{v}_{D_1}, \vec{n}_\alpha \rangle = \|\vec{v}_{D_1}\| \cdot \|\vec{n}_\alpha\| \cdot \cos x$$

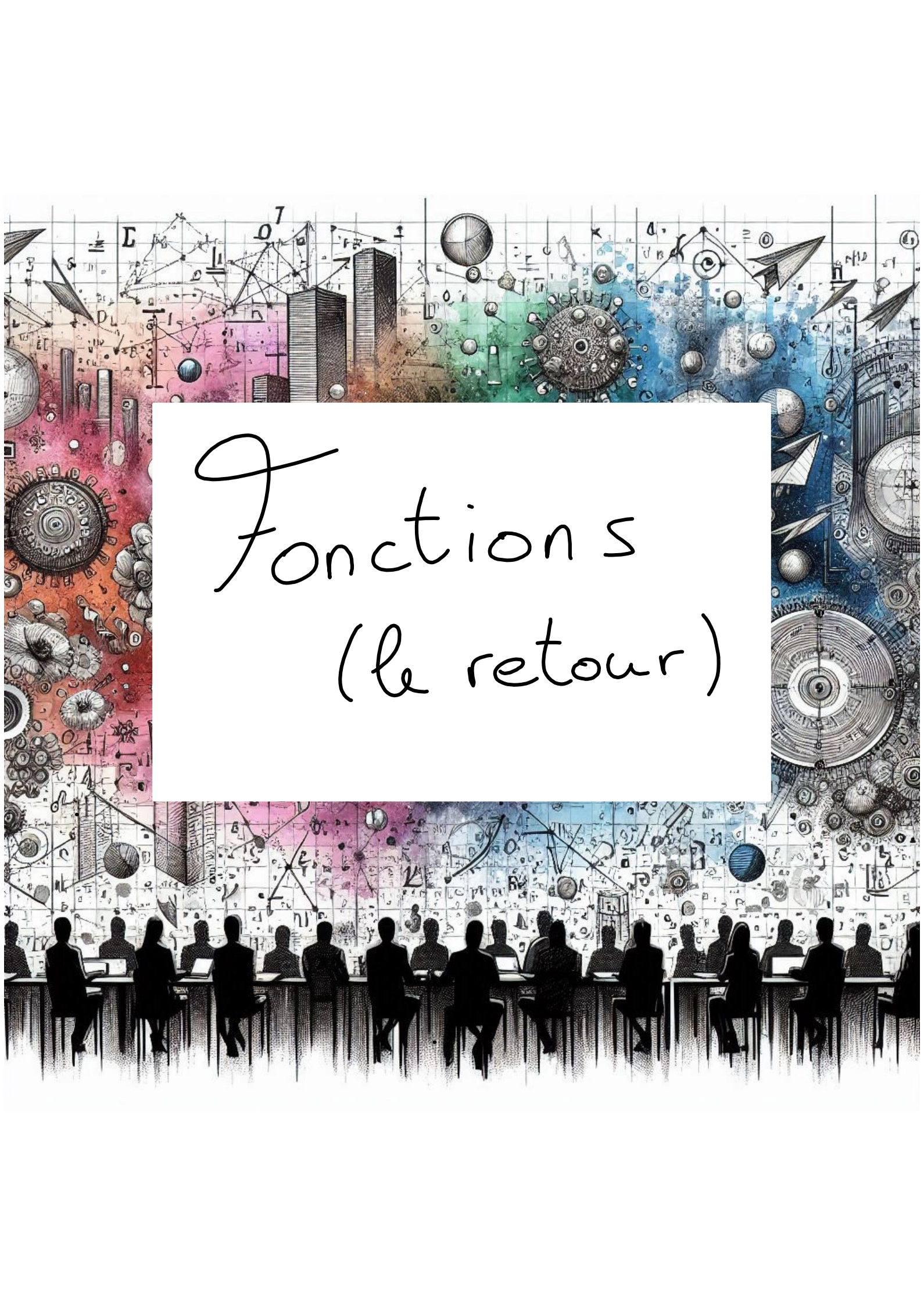
$$\Leftrightarrow 2 + (-1)(-2) + 2 \cdot 1 = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 2^2} \sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2} \cos x$$

$$\Leftrightarrow 2 + 2 + 2 = \sqrt{6} \sqrt{9} \cos x$$

$$\Leftrightarrow 6 = \sqrt{6} \cdot 3 \cos x$$

$$\Leftrightarrow \frac{2\sqrt{6}}{6} = \cos x$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{6}}{3} = \cos x \Rightarrow \angle(D_1, \alpha) = \frac{\pi}{2} - \arccos\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$$



Fonctions (le retour)

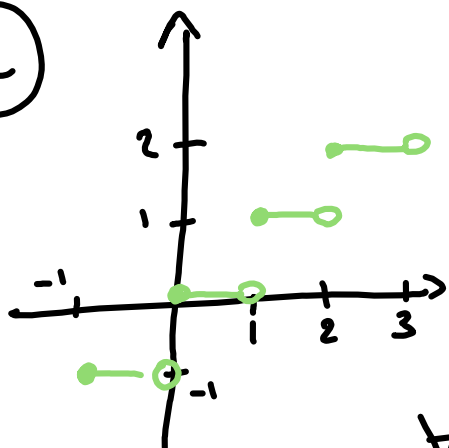
2.19. Soit les fonctions

- $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z} : x \rightarrow \lfloor x \rfloor$; (a)
- $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R} : x \rightarrow \lfloor x \rfloor$; (b)
- $\mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+ : x \rightarrow \sqrt{x}$; (c)

Déterminer celles qui sont injectives, surjectives, bijectives.

Donner la fonction inverse de chacune des fonctions bijectives.

(a)



. n'est pas injective

$$(f(0) = 0 = f(\frac{1}{2}))$$

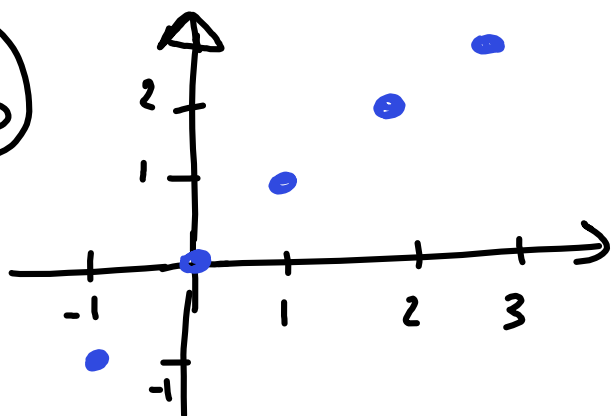
. est surjective car

$$\forall z \in \mathbb{Z}, \exists x \in \mathbb{R} \text{ t.q. } \lfloor x \rfloor = z$$

→ pas bijective

$$\text{p.ex. : } x = z, \text{ ou } x = z + \frac{1}{2}$$

(b)



→ pas bijective

. injective car

$$\forall z_1, z_2 \in \mathbb{Z}, z_1 \neq z_2, \text{ on a }$$

$$\lfloor z_1 \rfloor = z_1 \neq z_2 = \lfloor z_2 \rfloor$$

. pas surjective car

$$\nexists x \in \mathbb{Z} : \lfloor x \rfloor = \frac{1}{2}$$

. injective car $\forall x, y \in \mathbb{R}^+$

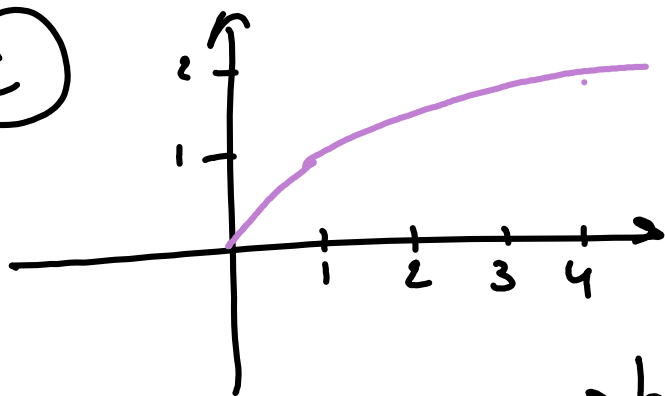
$$\sqrt{x} = \sqrt{y} \Leftrightarrow x = y$$

. surjective car $\forall x \in \mathbb{R}^+$

$$\text{on a } f(x^2) = \sqrt{x^2} = x$$

→ bijective, d'inverse $x \mapsto x^2$

(c)



Fonctions
& Équations
trigonométriques

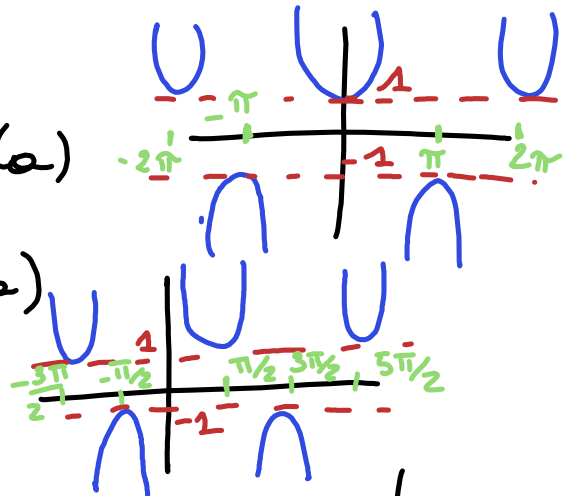
Roppels

$$\sin(a \pm b) = \sin(a)\cos(b) \pm \sin(b)\cos(a)$$

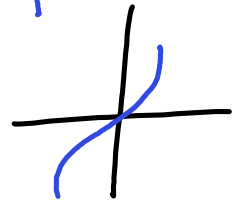
$$\cos(a \pm b) = \cos(a)\cos(b) \mp \sin(a)\sin(b)$$

$$\sec(a) = 1/\cos(a)$$

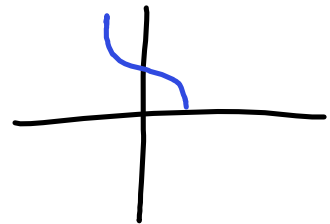
$$\csc(a) = 1/\sin(a)$$



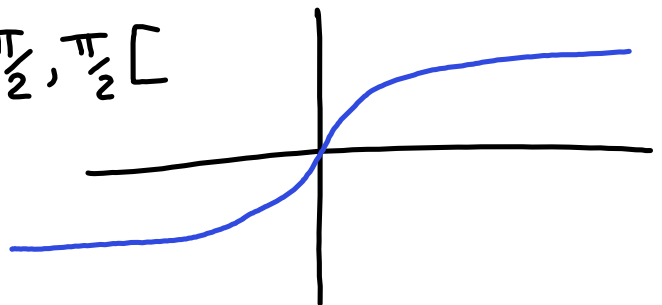
$$\arcsin : [-1, 1] \rightarrow [-\pi/2, \pi/2]$$



$$\arccos : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$$



$$\arctan : \mathbb{R} \rightarrow]-\pi/2, \pi/2[$$



7.1. Résoudre les équations suivantes en x :

b) $\sin x - \sin 2x = 0$;

h) $\sin x + \sqrt{3} \cos x = \sqrt{2}$;

j) $\arccos(2x^2 - 1) = 2 \arccos \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} \text{b) } \sin x = \sin 2x &\Leftrightarrow x = 2x + 2k\pi \text{ ou } x = \pi - 2x + 2k\pi \\ &\Leftrightarrow x = -2k\pi \text{ ou } x = \frac{1}{3} \cdot (2k+1)\pi \end{aligned}$$

$$\text{Donc } S = \left\{ 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \frac{1}{3}(2k+1)\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$\text{h) } \sin x + \sqrt{3} \cos x = \sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \sin x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \sin x + \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \text{ ou } x + \frac{\pi}{3} = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$$

$$\text{Donc } S = \left\{ -\frac{\pi}{12} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \frac{5\pi}{12} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$\text{j) } \arccos(2x^2 - 1) = 2 \arccos\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 1 = \cos\left(2 \cdot \arccos\left(\frac{1}{2}\right)\right) = 2\cos^2\left(\arccos\frac{1}{2}\right) - 1$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 1 = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 1 \Leftrightarrow 2x^2 = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \pm \frac{1}{2}$$

$$S = \left\{ -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\}$$

7.2. Déterminer la valeur de chacune des expressions suivantes :

g) $\cos(\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2})$; j) $\sec(\operatorname{arccotg} \sqrt{3})$.

g) $\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} = x \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin x \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4}$

$\Rightarrow \cos(\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2}) = \cos(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Rq: On a aussi $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}$

ici: $\sqrt{1-(\frac{\sqrt{2}}{2})^2} = \sqrt{1-\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

j) $\operatorname{arccotg} \sqrt{3} = x \Leftrightarrow \sqrt{3} = \cotg x$

$\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} = \tg x \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6}$

$\sec(\operatorname{arccotg} \sqrt{3}) = \frac{1}{\cos(\frac{\pi}{6})} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

pas de signe
ni de $+2k\pi$ à cause
de la def d'arcsin

7.3. Déterminer la valeur (en fonction de x) de

f) $\operatorname{tg}(\arcsin 5x)$

$$\operatorname{tg}(\arcsin 5x) = \frac{\sin(\arcsin 5x)}{\cos(\arcsin 5x)}$$

$$= \frac{5x}{\sqrt{1-(5x)^2}} = \frac{5x \cdot \sqrt{1-25x^2}}{1-25x^2}$$

7.4. Déterminer les domaines de définition des fonctions $x \mapsto y = y(x)$ suivantes :

c) $y = \arctan(\sin 3x)$;

g) $y = \arccos(\operatorname{tg} 2x)$;

$$c) \operatorname{dom}(\arctan(x)) = \mathbb{R}$$

$$\rightarrow \operatorname{dom}(\arctan(\sin 3x)) = \operatorname{dom}(\sin 3x) \\ = \mathbb{R}$$

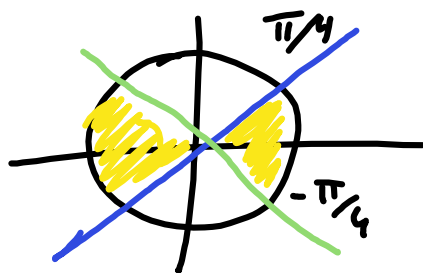
$$g) \operatorname{dom}(\arccos x) = [-1, 1]$$

Donc on veut que $\operatorname{tg} 2x \in [-1, 1]$

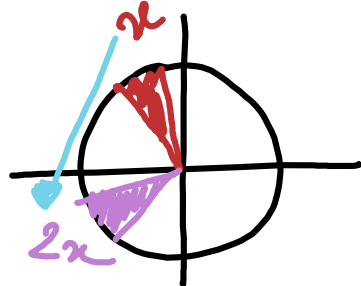
$$\text{Or } \operatorname{tg} 2x \in [-1, 1] \Leftrightarrow -1 \leq \operatorname{tg} 2x \leq 1$$

$$\Leftrightarrow \underline{-1 \leq \operatorname{tg} 2x} \quad \text{et} \quad \underline{1 \geq \operatorname{tg} 2x}$$

$$\Leftrightarrow 2x \geq -\frac{\pi}{4} + k\pi \quad \text{et} \quad 2x \leq \frac{\pi}{4} + k\pi$$



$$\Leftrightarrow -\frac{\pi}{8} + \frac{k}{2}\pi \leq x \leq \frac{\pi}{8} + \frac{k}{2}\pi$$



$$\text{Donc } \operatorname{dom}(\arccos(\operatorname{tg} 2x)) = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left[-\frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2} \right]$$