

MATH-F112

Correction du TP1

Logique et Nombres

Exercice 1.1

Traduisez chacune des affirmations suivantes par une formule logique en utilisant les lettres indiquées et les symboles $\rightarrow$ (« implique »), $\vee$ (« ou »), $\wedge$ (« et ») et, si nécessaire, le symbole $\neg$ (« non »).

(g) **La fonction est continue si elle est dérivable. (C,D).**

Ici il faut comprendre : « si la fonction est dérivable (D), alors elle est continue (C). »
On déduit donc que :

$$D \rightarrow C$$

Remarquons que nous n'avons pas : $C \rightarrow D$

(i) **La différentiabilité de f en p_0 entraîne la continuité de f en p_0 . (D,C)**

$$D \rightarrow C$$

Remarquons que nous n'avons pas : $C \rightarrow D$

Pour les trois exercices suivants, rappelons que si on considère P et Q deux propositions, on dit que :

- **Q est une condition nécessaire pour avoir P** si dès que P est vraie, alors nécessairement, obligatoirement Q est vraie.
- **Q est une condition suffisante pour avoir P** s'il suffit que Q soit vraie pour que P soit vraie.

(j) **Pour que f admette un extrémum en p_0 , il faut que :** $\frac{\partial f}{\partial x}(p_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(p_0) = 0$ (E,N)

N est une condition nécessaire pour E.

$$E \rightarrow N$$

Et à nouveau, remarquons que nous n'avons pas : $N \rightarrow E$

N est donc une condition nécessaire mais non suffisante pour E.

- (k) **Pour qu'il y ait indépendance du chemin, il suffit que certaines conditions techniques soient satisfaites et que le rotationnel soit nul. (I,T,N)**

$$T \wedge N \rightarrow I$$

- (l) **Une condition nécessaire pour qu'il y ait indépendance du chemin est que le champ de vecteurs dérive d'un potentiel scalaire. (I,P)**

$$I \rightarrow P$$

- (m) **Une condition suffisante pour qu'une matrice $n \times n$ soit diagonalisable est qu'elle admette n valeurs propres distinctes. (D,V)**

$$V \rightarrow D$$

Exercice 1.3

Déterminez lesquelles des argumentations suivantes sont correctes.

- (a) **Luc a reçu une lettre. Si Luc est promu, il doit recevoir une lettre. Donc Luc a été promu.**

La règle est : si Luc est promu, il doit recevoir une lettre

$$P \rightarrow L$$

Par contre l'implication qu'on essaie de nous vendre est : recevoir une lettre signifie qu'il est promu

$$L \rightarrow P$$

Cette implication est différente de la règle, donc l'argumentation est erronée.

- (d) **Lise vient de réussir l'interrogation de mathématiques. Lorsque Lise réussit un test, Jacques est heureux. Donc Jacques est heureux.**

La règle est : si Lise réussit un test (R), Jacques est heureux (H).

$$R \rightarrow H$$

Comme Lise vient de réussir l'interrogation, on a R donc Jacques est heureux. L'affirmation est donc vraie.

- (e) **Cédric se prend pour Napoléon. Seuls les fous se prennent pour Napoléon. Donc Cédric est fou.**

La règle est : si on se prend pour Napoléon (N), alors on est fou (F).

$$N \rightarrow F$$

Comme Cédric se prend pour Napoléon, on a N donc Cédric est fou. L'affirmation est donc vraie.

- (g) **Si un nombre est divisible par 4, il est pair. Comme le nombre donné n'est pas pair, il n'est pas divisible par 4.**

La règle est : si un nombre est divisible par 4 (D) alors il est pair (P)

$$D \rightarrow P$$

Ce qui est équivalent à :

$$\neg P \rightarrow \neg D$$

Donc l'affirmation est vraie.

Exercice 1.9

Démontrez par récurrence (pour n un nombre naturel) :

$$(c) \quad 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + n \cdot (n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

1. Etape 1 : Initialisation

Vérifions la propriété pour $n = 1$.

$$\text{Nous avons bien } 1 \cdot 2 = \frac{1(2)(3)}{3}.$$

2. Etape 2 : Hypothèse de récurrence

Supposons que $\forall k \in \mathbb{N}$, nous avons :

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + k \cdot (k+1) = \frac{k(k+1)(k+2)}{3}$$

3. Etape 3 : Hérédité

Nous cherchons à montrer que la proposition est vraie pour $n = k+1$, c'est à dire :

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + k \cdot (k+1) + (k+1) \cdot (k+2) = \frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3}$$

Or,

$$\begin{aligned} 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + k \cdot (k+1) + (k+1) \cdot (k+2) &= \frac{k(k+1)(k+2)}{3} + (k+1) \cdot (k+2) \\ &= \frac{k(k+1)(k+2)}{3} + \frac{3(k+1)(k+2)}{3} \\ &= \frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3} \end{aligned}$$

4. Etape 4 : Conclusion

On déduit donc par récurrence que la proposition

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + k \cdot (k+1) = \frac{k(k+1)(k+2)}{3}$$

est vraie $\forall n \in \mathbb{N}$

Exercice 1.16

En utilisant les abréviations $\mathbb{N}$ pour l'ensemble des nombres naturels

$P(x)$ pour « x est pair »,

$I(x)$ pour « x est premier »,

Traduisez en formules logiques les assertions suivantes :

(a) **il existe un nombre naturel pair ;**

$$\exists x \in \mathbb{N} : P(x)$$

(b) **il existe un nombre naturel pair et premier ;**

$$\exists x \in \mathbb{N} : P(x) \wedge I(x)$$

Exercice 1.29

Chacun des cartons ci-dessous porte sur une face un nombre et sur l'autre une lettre. Pour vérifier si la phrase suivante est vraie : « Si un carton porte une voyelle sur une face, alors il porte un nombre pair sur l'autre »

- il faut retourner tous les cartons
- il suffit de retourner A et M ;
- il suffit de retourner A et 3 ;
- il suffit de retourner A et 6.

On doit vérifier qu'il y'a bien un nombre pair derrière le A. Ensuite on doit vérifier qu'il n'y a pas de voyelle derrière le nombre 3 (car si il y'a une voyelle, il ne peut pas y avoir de nombre impair). On doit donc uniquement retourner le A et le 3.

Exercice 1.32

Quatre individus, dont l'un a commis un vol, sont arrêtés par la police et font les déclarations suivantes :

- Alain : « Bernard est coupable »
- Bernard : « Daniel est coupable »
- Charles : « Je ne suis pas coupable »
- Daniel : « Bernard ment lorsqu'il dit que je suis coupable »

Sachant qu'une seule de ces déclarations est vraie, qui est coupable du vol ?

- Si Alain dit vrai, Bernard est coupable mais Charles ment donc c'est lui qui est coupable. C'est une contradiction, alors Alain ment.
- Par un argument similaire, Bernard ment.
- Si Charles dit vrai, Bernard ment et donc Daniel dit vrai. Ce qui contredit l'énoncé.
- C'est donc Daniel qui dit vrai et donc Charles ment, c'est Charles qui est coupable.

Exercice 2.2

(a)

$$\begin{aligned}\frac{1}{x} &= 3 \\ \Leftrightarrow 3x &= 1 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{1}{3}\end{aligned}$$

$$S : \{1/3\}$$

(d)

$$\begin{aligned}8 - \frac{1}{x^2} &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{x^2} &= 8 \\ \Leftrightarrow 1 &= 8x^2 \\ \Leftrightarrow x^2 &= \frac{1}{8} \\ \Leftrightarrow x &= \pm \sqrt{\frac{1}{8}} \\ \Leftrightarrow x &= \pm \frac{\sqrt{2}}{4}\end{aligned}$$

$$S : \left\{ -\frac{\sqrt{2}}{4}; \frac{\sqrt{2}}{4} \right\}$$

(g) On cherche les solutions de l'équation

$$|x^2 + 4x + 3| = 1 \quad (1)$$

L'équation se sépare en deux cas :

CAS A

$$x^2 + 4x + 3 = 1$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 4x + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x \in \{-\sqrt{2} - 2; \sqrt{2} - 2\}$$

Ainsi, l'ensemble des solutions de (??) est

$$S : \{-\sqrt{2} - 2; \sqrt{2} - 2; -2\}$$

CAS B

$$x^2 + 4x + 3 = -1$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 4x + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -2.$$

Exercice 2.3

(b)

$$-1 < -2x + 3 \leq 2$$

$$\Leftrightarrow -4 < -2x \leq -1$$

L'équation se sépare donc en deux cas :

CAS A

$$-4 < -2x$$

$$\Leftrightarrow 2 > x$$

$$\Leftrightarrow x < 2$$

CAS B

$$-2x \leq -1$$

$$\Leftrightarrow x \geq 1/2$$

$$S : [1/2 : 2[$$

(d)

$$8 - \frac{1}{x^2} < 0$$

$$\Leftrightarrow 8x^2 < 1 \text{ (car } x^2 \text{ est positif !)}$$

$$\Leftrightarrow x^2 < 1/8$$

$$\Leftrightarrow -\sqrt{2}/4 < x < \sqrt{2}/4$$

$$S :]-\sqrt{2}/4 : \sqrt{2}/4[\setminus \{0\}$$

(g) On cherche l'ensemble S des éléments qui vérifient l'inégalité

$$|x^2 + 4x + 3| \geq 1 \quad (2)$$

On a deux cas :

CAS A

$$x^2 + 4x + 3 \geq 1$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 4x + 2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \setminus]-\sqrt{2} - 2; \sqrt{2} - 2[$$

Ainsi,

CAS B

$$x^2 + 4x + 3 \leq -1$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 4x + 4 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow x = -2.$$

$$S : \left(\mathbb{R} \setminus]-\sqrt{2} - 2; \sqrt{2} - 2[\right) \cup \{-2\}.$$

Exercice 2.8

(1)

$$\begin{aligned}
\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{a^5} &= a^{1/3} a^{5/3} \\
&= a^{1/3+5/3} \\
&= a^{6/3} = a^2
\end{aligned}$$

Exercice 2.13

On cherche à prouver que :

$$\sum_{i=1}^n i = \binom{n+1}{2}$$

Rappelons que :

- $\sum_{i=1}^n i = 1 + 2 + 3 + \dots + n$
- $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$

$$\text{On déduit donc que : } \binom{n+1}{2} = \frac{(n+1)!}{(n-1)!2!} = \frac{(n+1)(n)(n-1)(n-2)\dots 2 \cdot 1}{(n-1)(n-2)\dots 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{n(n+1)}{2}$$

Il nous reste donc à prouver que :

$$\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$$

1. Etape 1 : Initialisation

$$1 = 1 \cdot \frac{1 \cdot 2}{2}$$

2. Etape 2 : Hypothèse de récurrence

$$\text{Supposons que } \sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$$

3. Etape 3 : Hérédité

$$\text{Montrons que } \sum_{i=1}^{n+1} i = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n+1} i &= \sum_{i=1}^n i + (n+1) \\
&= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \\
&= \frac{n(n+1)}{2} + \frac{2(n+1)}{2} \\
&= \frac{(n+1)(n+2)}{2}
\end{aligned}$$

