

MATH-F112
Correction du TP10
Intégrales définies

Exercice 12.1

(e) L'allure de l'intégrale suggère le changement de variables suivant :

$$u = \sin(x) \text{ et } du = \cos(x) \, dx,$$

avec $0 (= \sin(0))$ et $1 (= \sin(\pi/2))$ comme nouvelles bornes pour u . L'intégrale devient donc

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x)}{\sqrt{\sin^2(x) + 8}} \, dx &= \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{u^2 + 8}} \\ &= \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{8(u^2/8 + 1)}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{8}} \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{(u/\sqrt{8})^2 + 1}} \\ &= \left[\operatorname{arcsinh} \left(\frac{u}{\sqrt{8}} \right) \right]_0^1 \approx 0.34657 \end{aligned}$$

On pourrait résoudre la dernière étape via un changement de variable intermédiaire $v = \frac{u}{\sqrt{8}}$.

(g) Observons que l'intégrale

$$\int_1^2 \frac{\ln(t)}{\sqrt{t}} \, dt$$

ne peut pas être résolue par intégration immédiate. Étant donné la forme de l'intégrande, nous utiliserons la méthode d'intégration par parties. Posons

$$\begin{cases} f'(t) = \frac{1}{\sqrt{t}} & \rightarrow f(t) = \int t^{-\frac{1}{2}} \, dt = \frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} = 2t^{\frac{1}{2}} \\ g(t) = \ln(t) & \rightarrow g'(t) = \frac{1}{t} \end{cases}.$$

On déduit alors par la formule d'intégration par parties que

$$\begin{aligned}
 \int_1^2 \frac{\ln(t)}{\sqrt{t}} dt &= 2 \left[\sqrt{t} \cdot \ln(t) \right]_1^2 - 2 \int_1^2 t^{\frac{1}{2}} \cdot t^{-1} dt \\
 &= 2 \left[\sqrt{2} \ln(2) - \sqrt{1} \ln(1) \right] - 2 \int_1^2 t^{-\frac{1}{2}} dt \\
 &= 2\sqrt{2} \ln(2) - 4 \left[t^{\frac{1}{2}} \right]_1^2 \\
 &= 2\sqrt{2} \ln(2) - 4 \left[\sqrt{2} - \sqrt{1} \right] \\
 &= 2\sqrt{2} \ln(2) - 4\sqrt{2} + 4
 \end{aligned}$$

(h) Observons que l'intégrale

$$\int_2^3 \frac{1}{x^2 + 6x - 7} dx$$

ne peut pas être résolue par intégration immédiate. Étant donné la forme de l'intégrande, nous utiliserons la méthode de décomposition en fractions simples.

• Étape 1 : Décomposition en fractions simples

Analysons à quel sous-cas de la décomposition en fractions simples nous avons à faire. Pour cela, factorisons le dénominateur :

$$x^2 + 6x - 7 \quad (1)$$

en utilisant la méthode du Delta.

$$\Delta = 6^2 - 4 \cdot (-7) \cdot 1 = 64 \quad (2)$$

et

$$\begin{cases} x_1 = \frac{-6 + \sqrt{64}}{2 \cdot 1} = 1 \\ x_2 = \frac{-6 - \sqrt{64}}{2 \cdot 1} = -7 \end{cases} \quad (3)$$

On se trouve donc dans le cas où le dénominateur possède deux racines distinctes avec un dénominateur qui se factorise comme

$$x^2 + 6x - 7 = (x - 1)(x + 7).$$

Nous pouvons donc écrire l'intégrande comme une somme de fractions de dénominateurs du premier degré :

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{x^2 + 6x - 7} &= \frac{A}{(x - 1)} + \frac{B}{(x + 7)} \quad (4) \\
 \Leftrightarrow \frac{1}{x^2 + 6x - 7} &= \frac{A(x + 7) + B(x - 1)}{(x - 1)(x + 7)} \\
 \Leftrightarrow \frac{1 + 0x}{x^2 + 6x - 7} &= \frac{(7A - B) + (A + B)x}{x^2 + 6x - 7}.
 \end{aligned}$$

On en déduit

$$\begin{cases} 7A - B = 1 \\ A + B = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8A = 1 \\ A = -B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = \frac{1}{8} \\ B = -\frac{1}{8} \end{cases} \quad (5)$$

En injectant (??) dans (??), on peut écrire

$$\frac{1}{x^2 + 6x - 7} = \frac{1}{8(x-1)} - \frac{1}{8(x+7)} \quad (6)$$

• **Étape 2 : Intégration des fractions simples**

$$\begin{aligned} \int_2^3 \frac{dx}{x^2 + 6x - 7} &= \int_2^3 \left[\frac{1}{8(x-1)} - \frac{1}{8(x+7)} \right] dx \\ &= \int_2^3 \frac{1}{8(x-1)} dx - \int_2^3 \frac{1}{8(x+7)} dx \\ &= \frac{1}{8} \int_2^3 \frac{1}{(x-1)} dx - \frac{1}{8} \int_2^3 \frac{1}{(x+7)} dx \\ &= \frac{1}{8} [\ln(|x-1|)]_2^3 - \frac{1}{8} [\ln(|x+7|)]_2^3 \\ &= \frac{1}{8} [\ln(2) - \ln(1)] - \frac{1}{8} [\ln(10) - \ln(9)] \\ &= \frac{1}{8} \ln\left(\frac{18}{10}\right) \\ &= \frac{1}{8} \ln\left(\frac{9}{5}\right) \end{aligned}$$

(m) Pour calculer

$$\int_0^{\pi/4} \operatorname{tg}^2 x \, dx,$$

rappelons-nous que d'une part

$$1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} \Leftrightarrow \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} - 1$$

et que d'autre part

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

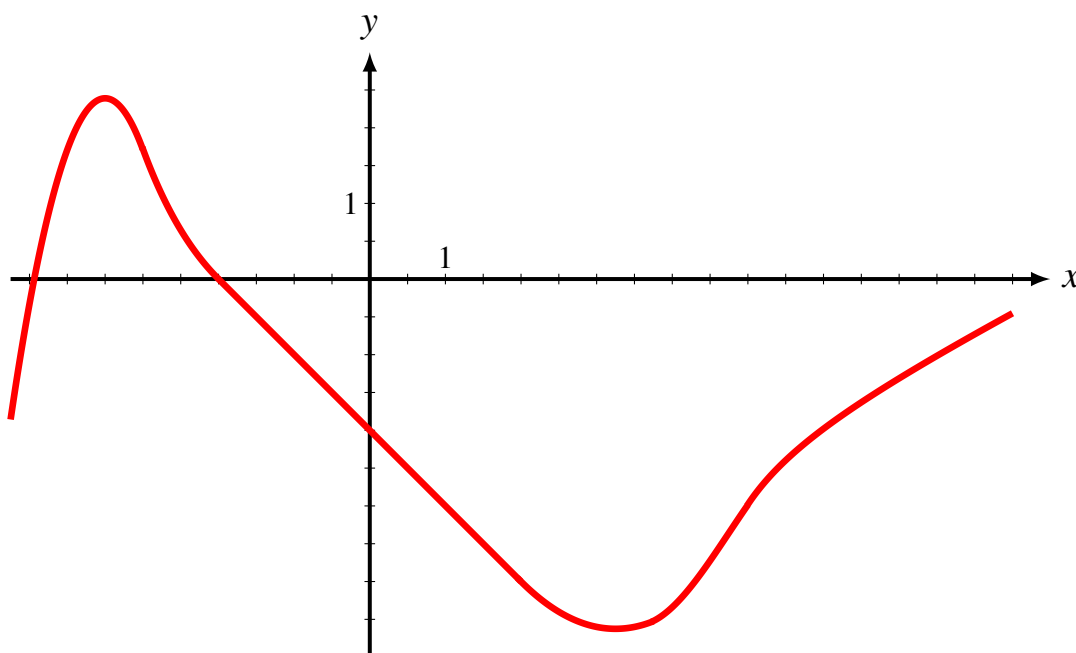
Nous pouvons donc intégrer facilement :

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/4} \operatorname{tg}^2 x \, dx &= \int_0^{\pi/4} \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx \\ &= [\operatorname{tg} x - x]_0^{\pi/4} \\ &= \left(\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} \right) - (0 - 0) \\ &= 1 - \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

Exercice 12.8

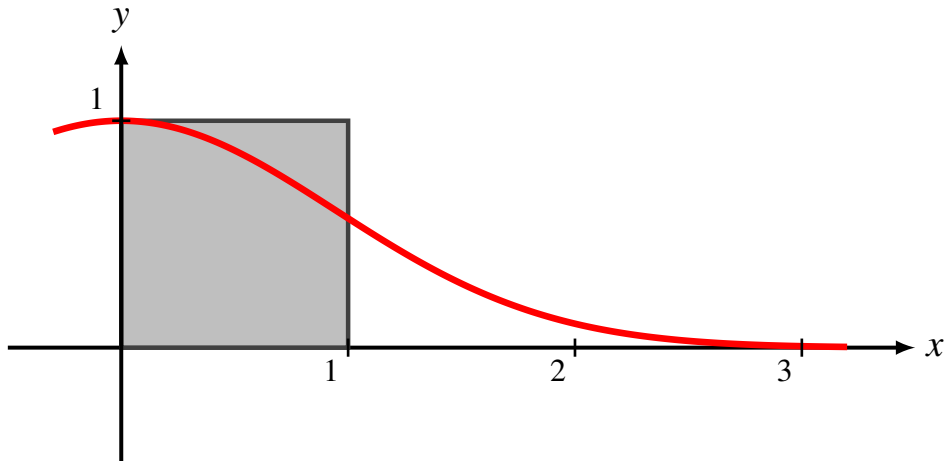
Pour avoir une idée du graphe de la primitive, nous nous basons sur les informations que nous apportent les dérivées d'une fonction. En effet, $F'(x) = f(x)$, donc quand $f(x)$ est positive (négative), $F(x)$ sera croissante (décroissante). De même, $F''(x) = f'(x)$. Dès lors quand $f(x)$ est croissante (décroissante), on sait que $f'(x) = F''(x)$ est positive (négative), et donc que $F(x)$ a une concavité positive (négative).

- Commençons par le morceau "facile", autour de 0. Entre -2 et 2 , $f(x) = -1$ donc $F(x) = -x + C$ avec $C = -2$ pour satisfaire la condition de l'énoncé.
- Entre 2 et 3.5 , $f(x)$ est croissante, donc concavité positive pour $F(x)$ avec un minimum en 3.25 (où $f(x) = 0$). De fait avant 3.25 , $f(x)$ est négative donc $F(x)$ est décroissante, inversement après 3.25 .
- On garde plus ou moins le même comportement (càd croissante et concavité positive) sur le morceau suivant, jusqu'en 4.75 , où la dérivée seconde change de signe (car $f(x)$ passe de croissante à décroissante), il y a donc un changement de concavité (point d'inflexion).
- Vu que $f(x)$ finit en asymptote horizontale, $F(x)$ va finir en asymptote oblique (d'équation $y = -x/2 + p$; en théorie, la valeur du p dépend du $C = -2$ lié à l'énoncé, mais sans avoir l'expression exacte de $f(x)$, ce n'est pas trivial de le déterminer. Ce n'est absolument pas un problème vu qu'on ne nous demande pas plus qu'une esquisse du graphe).
- Regardons maintenant la partie gauche du graphe. Entre -3 et -2 , $f(x)$ est négative et croissante, $F(x)$ est donc décroissante et de concavité positive.
- Entre -3 et la fin de la partie visible du graphe, $f(x)$ est décroissante, mais change de signe en -3.5 . Il y aura donc un maximum en -3.5 dans le graphe de $F(x)$ (qui sera de concavité négative sur ce morceau là). Tout comme l'extrémité droite du graphe, on ne sait pas savoir comment la fonction se comporte tout à gauche.



Exercice 12.11

Jusqu'à preuve du contraire, on sait que 0 est plus petit que 1 . Un contrôle rapide nous apprend que la fonction $f(x) = e^{-x^2}$ est paire. Dès lors la surface sous la courbe est la même entre -3 et -2 que entre 2 et 3 . Donc les deux intégrales sont identiques. Il nous reste à classer l'intégrale entre 0 et 1 par rapport à celle entre 2 et 3 , ainsi que par rapport à la valeur 1 . Comme les intégrales ne sont pas calculables à la main, on va s'aider du graphe de $f(x)$. On sait que $f(0) = 1$ et que $f(x)$ est décroissante pour $x \geq 0$ (comme toute fonction exponentielle négative). Dès lors :



On voit donc très bien que la surface sous la courbe est plus grande entre 0 et 1 qu'entre 2 et 3 d'une part ; d'autre part qu'elle est plus petite que le carré de surface 1 (car de côté 1). On a donc

$$0 \leq \int_{-3}^{-2} e^{-x^2} dx = \int_2^3 e^{-x^2} dx \leq \int_0^1 e^{-x^2} dx \leq 1$$

Exercice 12.19

Ce sont des intégrales généralisées car au moins une des bornes vaut $\pm\infty$ ou est un point où la fonction n'est pas définie. Pour résoudre ces intégrales, on va calculer la limite d'une intégrale définie.

- (a) La borne "qui pose problème" est 3. On va donc remplacer 3 par un k et laisser ce k tendre vers 3 (par des valeurs supérieures à 3 vu qu'on veut intégrer de 3 à 4). Cela donne donc

$$\begin{aligned} \int_3^4 \frac{dx}{x-3} &= \lim_{k \rightarrow 3^+} \int_k^4 \frac{dx}{x-3} \\ &= \lim_{k \rightarrow 3^+} [\ln(|x-3|)]_k^4 \\ &= \lim_{k \rightarrow 3^+} [\ln(1) - \ln(k-3)] \\ &= 0 - (-\infty) = \infty \end{aligned}$$

- (e) Même principe, cela donne :

$$\begin{aligned} \int_1^\infty \frac{dx}{x^2+1} &= \lim_{k \rightarrow \infty} \int_1^k \frac{dx}{x^2+1} \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} [\arctg(x)]_1^k \\ &= \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

Exercice 12.20

- (1) En temps normal, quand le polynôme du numérateur a un degré plus élevé que le polynôme du dénominateur, on commencerait par faire une division euclidienne des polynômes. Seulement, de par la forme particulière des polynômes ici, il y a moyen de s'en passer via un changement de variable. On va poser

$$u = t^2 \Rightarrow du = 2t dt \Rightarrow \frac{du}{2} = t dt.$$

L'intégrale devient alors

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{t^3}{t^2+1} dt &= \int_0^1 \frac{t \cdot t^2}{t^2+1} dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{u}{u+1} du,\end{aligned}$$

notons qu'on doit adapter les bornes lors du changement de variable. Mais quand $t = 0$, $u = 0$ et pareil pour $t = 1$, donc les nouvelles bornes sont les mêmes que les anciennes.

$$\begin{aligned}&= \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{u+1-1}{u+1} du \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 1 - \frac{1}{u+1} du \\ &= \frac{1}{2} [u - \ln|u+1|]_0^1 \\ &= \frac{1 - \ln(2)}{2}\end{aligned}$$