

MATH-F112

Correction de la séance de TP 11

Chapitres 14, 15 et 16

14.8, 15.2 (a,e,f,g,j), 15.6, 15.9 (a,c,d) , 16.1 (c), 16.2 (a)

Exercice 14.8

Soit A une matrice complexe $n \times n$ qui vérifie l'équation $A^2 + 2A + 3I = 0$. Démontrer que A est inversible et calculer A^{-1} en fonction de A .

Commençons par factoriser l'expression $A^2 + 2A + 3I = 0$. On a

$$\Delta = 2^2 - 4 \times 3 = -8 = (2\sqrt{2}i)^2$$

On trouve donc

$$A^2 + 2A + 3I = \left(A - \frac{-2 - 2\sqrt{2}i}{2}I\right) \left(A - \frac{-2 + 2\sqrt{2}i}{2}I\right) \quad (1.1)$$

$$= (A - (-1 - \sqrt{2}i)I) (A - (-1 + \sqrt{2}i)I) \quad (1.2)$$

Dès lors,

$$A^2 + 2A + 3I = 0 \Leftrightarrow (A - (-1 - \sqrt{2}i)I) (A - (-1 + \sqrt{2}i)I) = 0 \quad (1.3)$$

$$\Leftrightarrow A - (-1 - \sqrt{2}i)I = 0 \text{ ou } A - (-1 + \sqrt{2}i)I = 0 \quad (1.4)$$

$$\Leftrightarrow A = (-1 - \sqrt{2}i)I \text{ ou } A = (-1 + \sqrt{2}i)I \quad (1.5)$$

Or, la matrice I est trivialement inversible et est sa propre inverse. Donc

$$A^{-1} = (-1 - \sqrt{2}i)^{-1}I \text{ ou } A^{-1} = (-1 + \sqrt{2}i)^{-1}I \quad (1.6)$$

$$\Leftrightarrow A^{-1} = \frac{-1 + \sqrt{2}i}{3}I \text{ ou } A^{-1} = \frac{1 + \sqrt{2}i}{3}I \quad (1.7)$$

Exercice 15.2

Résoudre les systèmes réels suivants par la méthode de Gauss (toutes les inconnues apparaissent dans au moins une équation).

$$\text{a) } \begin{cases} x + 2y = 4 \\ 2x + 3y = 5 \end{cases}$$

$$\text{f) } \begin{cases} 3x + 4y + z + 2t = 3 \\ 6x + 8y + 2z + 5t = 7 \\ 9x + 12y + 3z + 10t = 13 \end{cases}$$

$$\text{e) } \begin{cases} x + 4y + z = 12 \\ x + y - z = 0 \\ 2x + y = 4 \\ x + z = 0 \end{cases}$$

$$\text{g) } \begin{cases} 2x + y - 3z - t = 1 \\ x - 4y + 3z + 4t = -4 \end{cases}$$

$$j) \begin{cases} x+y-2z=0 \\ x-2y+z=0 \\ -2x+y+z=0 \end{cases}$$

a) On a

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 5 \end{array} \right) \xrightarrow[\leftarrow +]{-2} \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3-4 & 5-8 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -3 \end{array} \right) \xrightarrow[\leftarrow \cdot (-1)]{+}_2 \quad (1.8)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 4-6 \\ 0 & 1 & 3 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{array} \right) \quad (1.9)$$

Ce qui livre

$$\begin{cases} x & = -2 \\ y & = 3 \end{cases} \quad (1.10)$$

La solution du système est donc

$$\{(-2, 3)\}$$

e) On a

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 1 & 12 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \end{array} \right) \xrightarrow[\leftarrow]{-} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & 4 & 1 & 12 \end{array} \right) \xrightarrow[\leftarrow +]{\begin{matrix} -1 & -2 \\ -1 & + \end{matrix}} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & 4 & 0 & 8 \end{array} \right) \xrightarrow[\leftarrow +]{-1} \quad (1.11)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & 4 & 0 & 8 \end{array} \right) \xrightarrow[\leftarrow +]{\begin{matrix} -1 & -4 \end{matrix}} \quad (1.12)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 24 \end{array} \right) \quad (1.13)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 8 & 24 \end{array} \right) \xrightarrow{\cdot \frac{1}{8}} \quad (1.14)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right) \xrightarrow[\leftarrow -1]{+} \xrightarrow[\leftarrow 2]{+} \quad (1.15)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right) \quad (1.16)$$

Ce qui livre

$$\begin{cases} x & = 1 \\ y & = 2 \\ z & = 3 \end{cases} \quad (1.17)$$

La solution du système est donc

$$\{(1, 2, 3)\}$$

f) On a

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 & 2 & | & 3 \\ 6 & 8 & 2 & 5 & | & 7 \\ 9 & 12 & 3 & 10 & | & 13 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 2 & | & 3 \\ 2 & 8 & 6 & 5 & | & 7 \\ 3 & 12 & 9 & 10 & | & 13 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow -2 \\ \leftarrow + \\ \leftarrow + \end{array} \begin{array}{l} -3 \\ \\ + \end{array} \quad (1.18)$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 2 & | & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & | & 4 \end{pmatrix} \quad (1.19)$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 2 & | & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow + \\ \leftarrow -2 \end{array} \quad (1.20)$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 0 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 1 \end{pmatrix} \quad (1.21)$$

$$\sim \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 & 0 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 1 \end{pmatrix} \quad (1.22)$$

Ce qui livre

$$\begin{cases} 3x + 4y + z = 1 \\ t = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = -3x - 4y + 1 \\ t = 1 \end{cases} \quad (1.23)$$

L'ensemble des solutions est donc

$$\{(x, y, -3x - 4y + 1, 1) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$$

g) On a

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 & -1 & | & 1 \\ 1 & -4 & 3 & 4 & | & -4 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \\ \leftarrow \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 & 4 & | & -4 \\ 2 & 1 & -3 & -1 & | & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow -2 \\ \leftarrow + \end{array} \quad (1.24)$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 & 4 & | & -4 \\ 0 & 9 & -9 & -9 & | & 9 \end{pmatrix} \mid \cdot \frac{1}{9} \quad (1.25)$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 & 4 & | & -4 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & | & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow + \\ \leftarrow 4 \end{array} \quad (1.26)$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & | & 1 \end{pmatrix} \quad (1.27)$$

Ce qui livre

$$\begin{cases} x - z = 0 \\ y - z - t = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = z \\ y = z + t + 1 \end{cases} \quad (1.28)$$

L'ensemble des solutions est donc

$$\{(z, z + t + 1, z, t) \mid z, t \in \mathbb{R}\}$$

j) La matrice augmentée du système

$$\begin{cases} x + y - 2z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ -2x + y + z = 0 \end{cases} \quad (1.29)$$

s'écrit

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right). \quad (1.30)$$

- On sélectionne le pivot de la première colonne

$$\begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) \quad (1.31)$$

En effectuant les changements

$$\begin{cases} L'_1 = L_1 \\ L'_2 = L_2 - L_1 \\ L'_3 = L_3 + 2L_1 \end{cases}$$

la matrice augmentée (1.32) devient

$$\begin{array}{l} L'_1 \\ L'_2 \\ L'_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \end{array} \right) \quad (1.32)$$

- On sélectionne le pivot de la deuxième colonne

$$\begin{array}{l} L'_1 \\ L'_2 \\ L'_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & \boxed{-3} & 3 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \end{array} \right) \quad (1.33)$$

En effectuant les changements

$$\begin{cases} L''_1 = 3L'_1 \\ L''_2 = -\frac{L'_2}{3} \\ L''_3 = L'_3 \end{cases}$$

la matrice augmentée (1.33) devient

$$\begin{array}{l} L''_1 \\ L''_2 \\ L''_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \end{array} \right) \quad (1.34)$$

En effectuant les changements

$$\begin{cases} L'''_1 = L''_1 - L''_2 \\ L'''_2 = L''_2 \\ L'''_3 = L''_3 - 3L''_2 \end{cases}$$

la matrice augmentée (1.34) devient

$$\begin{array}{l} L'''_1 \\ L'''_2 \\ L'''_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad (1.35)$$

- On sélectionne le pivot de la troisième colonne mais comme l'élément sur la diagonale est nul, on s'arrête là.

De la matrice augmentée (1.35), on déduit le système d'équations suivant

$$\begin{cases} x - z = 0 \\ y - z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = z \\ y = z \end{cases}$$

Les solutions sont donc

$$S = \{(z, z, z) \in \mathbb{R}^3, \text{ avec } z \in \mathbb{R}\}$$

Exercice 15.6

Un problème italien de TARTAGLIA (16e siècle)

« Trois joyeux compagnons qui avoient deniers en bourse, s'entrefirent quelques questions, et dist le premier aux deux autres, si vous me donnez la moytié de voz ducas, j'auray ensemble avec ceux que je peux avoir de présent 20 ducas : le second dist aux deux autres, si vous me donner le tiers de voz ducatz, j'auray ensemble, avec ceux que je peux avoir 20 ducas ; mais dist le troisième aux deux autres, donnez moy le quart de ceux que vous avez, et avec ceux que j'ay, j'auray 20 ducas aussi bien que vous : combien avait de ducas un chacun d'iceux ? »

Soit d_1 le nombre de denier du premier compagnon, soit d_2 celui du second et soit d_3 celui du troisième. Le premier affirme « si vous me donnez la moytié de voz ducas, j'auray ensemble avec ceux que je peux avoir de présent 20 ducas ». Mathématiquement, il affirme

$$d_1 + \frac{1}{2}(d_2 + d_3) = 20 \quad (1.36)$$

Le second affirme « si vous me donner le tiers de voz ducatz, j'auray ensemble, avec ceux que je peux avoir 20 ducas ». Mathématiquement, on traduit cela sous l'équation suivante :

$$d_2 + \frac{1}{3}(d_1 + d_3) = 20 \quad (1.37)$$

Enfin, le troisième soutient « donnez moy le quart de ceux que vous avez, et avec ceux que j'ay, j'auray 20 ducas aussi bien que vous ». On a donc

$$d_3 + \frac{1}{4}(d_1 + d_2) = 20 \quad (1.38)$$

Le nombre de ducas de chacun est la solution (si elle existe) du système suivant

$$\begin{cases} d_1 + \frac{d_2}{2} + \frac{d_3}{2} = 20 \\ \frac{d_1}{3} + d_2 + \frac{d_3}{3} = 20 \\ \frac{d_1}{4} + \frac{d_2}{4} + d_3 = 20 \end{cases} \quad (1.39)$$

Réolvons ce système au moyen de la méthode de Gauss. On a

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 20 \\ \frac{1}{3} & 1 & \frac{1}{3} & 20 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 1 & 20 \end{array} \right) \begin{array}{l} | \cdot 2 \\ | \cdot 3 \\ | \cdot 4 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 40 \\ 1 & 3 & 1 & 60 \\ 1 & 1 & 4 & 80 \end{array} \right) \quad (1.40)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 40 \\ 1 & 3 & 1 & 60 \\ 4 & 1 & 1 & 80 \end{array} \right) \begin{array}{l} \leftarrow -1 \\ \leftarrow + \\ \leftarrow + \end{array} \quad (1.41)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 40 \\ 0 & 2 & -1 & 20 \\ 0 & -3 & -7 & -80 \end{array} \right) | \cdot (-1) \quad (1.42)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 40 \\ 0 & 1 & -2 & -20 \\ 0 & -7 & -3 & -80 \end{array} \right) \begin{array}{l} \leftarrow + \\ \leftarrow -2 \\ \leftarrow + \end{array} \quad (1.43)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 5 & 80 \\ 0 & 1 & -2 & -20 \\ 0 & 0 & -17 & -220 \end{array} \right) | \cdot \frac{-1}{17} \quad (1.44)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 5 & 80 \\ 0 & 1 & -2 & -20 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{220}{17} \end{array} \right) \begin{array}{l} \leftarrow + \\ \leftarrow + \\ \leftarrow 2 \end{array} \quad (1.45)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 80 - \frac{1100}{17} \\ 0 & 1 & 0 & -20 + \frac{440}{17} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{220}{17} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & \frac{260}{17} \\ 1 & 0 & 0 & \frac{100}{17} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{220}{17} \end{array} \right) \quad (1.46)$$

Ce qui livre comme solution

$$\left\{ \left(\frac{100}{17}, \frac{220}{17}, \frac{260}{17} \right) \right\}$$

Le premier compagon a donc la somme de $\frac{100}{17}$ ducas, le second de $\frac{220}{17}$ ducas et le troisième de $\frac{260}{17}$ ducas.

Exercice 15.9

Déterminer les inverses des matrices réelles suivantes

$$a) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad c) \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad d) \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

a)

- **Étape 1 : on vérifie d'abord que la matrice est bien inversible en calculant son déterminant**

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \left(1 \cdot \frac{1}{2}\right) - ((-2) \cdot 2) = \frac{1}{2} + 4 = \frac{9}{2}.$$

Le déterminant de A est non nul, donc A est bien inversible.

- **Étape 2 : si la matrice est inversible, on calcul son inverse par la méthode du pivot de Gauss augmentée de la matrice identité**

— On sélectionne le pivot de la première colonne

$$\begin{matrix} L_1 \\ L_2 \end{matrix} \left(\begin{array}{cc|cc} \boxed{1} & -2 & 1 & 0 \\ 2 & \frac{1}{2} & 0 & 1 \end{array} \right) \quad (1.47)$$

En effectuant les changements

$$\begin{cases} L'_1 = L_1 \\ L'_2 = L_2 - 2L_1 \end{cases},$$

la matrice augmentée (1.47) devient

$$\begin{matrix} L'_1 \\ L'_2 \end{matrix} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{9}{2} & -2 & 1 \end{array} \right).$$

— On sélectionne le pivot de la seconde colonne

$$\begin{matrix} L'_1 \\ L'_2 \end{matrix} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{\frac{9}{2}} & -2 & 1 \end{array} \right) \quad (1.48)$$

En effectuant les changements

$$\begin{cases} L''_1 = L'_1 \\ L''_2 = \frac{2}{9}L'_1 \end{cases},$$

la matrice augmentée (1.48) devient

$$\begin{matrix} L''_1 \\ L''_2 \end{matrix} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{4}{9} & \frac{2}{9} \end{array} \right). \quad (1.49)$$

En effectuant les changements

$$\begin{cases} L'''_1 = L''_1 + 2L''_2 \\ L'''_2 = L''_2 \end{cases},$$

la matrice augmentée (1.49) devient

$$\begin{array}{l} L_1''' \\ L_2''' \end{array} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{9} & \frac{4}{9} \\ 0 & 1 & -\frac{4}{9} & \frac{2}{9} \end{array} \right)$$

Par conséquent, la matrice inverse s'écrit

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{9} & \frac{4}{9} \\ \frac{4}{9} & \frac{2}{9} \\ -\frac{4}{9} & \frac{2}{9} \end{pmatrix}.$$

• **Étape 3 : on vérifie le résultat obtenu**

On a bien

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{9} & \frac{4}{9} \\ \frac{4}{9} & \frac{2}{9} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et

$$A^{-1} \cdot A = \begin{pmatrix} \frac{1}{9} & \frac{4}{9} \\ \frac{4}{9} & \frac{2}{9} \\ -\frac{4}{9} & \frac{2}{9} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

c)

• **Étape 1 : on vérifie d'abord que la matrice est bien inversible en calculant son déterminant**

$$\det(C) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{(1+1)} \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 1.$$

Le déterminant de C est non nul, donc C est bien inversible.

• **Étape 2 : si la matrice est inversible, on calcul son inverse par la méthode du pivot de Gauss augmentée de la matrice identité**

- La première colonne est déjà « nettoyée ».
- On sélectionne le pivot de la deuxième colonne

$$\begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \quad (1.50)$$

En effectuant les changements

$$\begin{cases} L'_1 = L_1 \\ L'_2 = 2L_2 \\ L'_3 = L_3 \end{cases},$$

la matrice augmentée (1.50) devient

$$\begin{matrix} L'_1 \\ L'_2 \\ L'_3 \end{matrix} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\sqrt{3} & 0 & 2 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \quad (1.51)$$

En effectuant les changements

$$\begin{cases} L''_1 = L'_1 \\ L''_2 = L'_2 \\ L''_3 = L'_3 - \frac{\sqrt{3}}{2}L'_2 \end{cases},$$

la matrice augmentée (1.51) devient

$$\begin{matrix} L''_1 \\ L''_2 \\ L''_3 \end{matrix} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\sqrt{3} & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -\sqrt{3} & 1 \end{array} \right)$$

— On sélectionne le pivot de la troisième colonne

$$\begin{matrix} L''_1 \\ L''_2 \\ L''_3 \end{matrix} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\sqrt{3} & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{2} & 0 & -\sqrt{3} & 1 \end{array} \right) \quad (1.52)$$

En effectuant les changements

$$\begin{cases} L'''_1 = L''_1 \\ L'''_2 = L''_2 \\ L'''_3 = \frac{L''_3}{2} \end{cases},$$

la matrice augmentée (1.52) devient

$$\begin{matrix} L'''_1 \\ L'''_2 \\ L'''_3 \end{matrix} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\sqrt{3} & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{array} \right) \quad (1.53)$$

En effectuant les changements

$$\begin{cases} L''''_1 = L'''_1 \\ L''''_2 = L'''_2 + \sqrt{3}L'''_3 \\ L''''_3 = L'''_3 \end{cases},$$

la matrice augmentée (1.53) devient

$$\begin{array}{l} L_1''' \\ L_2''' \\ L_3''' \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{array} \right)$$

Par conséquent, la matrice inverse s'écrit

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

• **Étape 3 : on vérifie le résultat obtenu**

On a bien

$$C \cdot C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et

$$C^{-1} \cdot C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

d)

• **Étape 1 : on vérifie d'abord que la matrice est bien inversible en calculant son déterminant**

$$\det(D) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{(1+1)} \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-1)^{(1+1)} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 3[(2 \cdot 3) - (1 \cdot 0)] = 18.$$

Le déterminant de D est non nul, donc D est bien inversible.

• **Étape 2 : si la matrice est inversible, on calcule son inverse par la méthode du pivot de Gauss augmentée de la matrice identité**

— La première colonne est déjà « nettoyée »

— On sélectionne le pivot de la deuxième colonne

$$\begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \quad (1.54)$$

En effectuant les changements

$$\begin{cases} L'_1 = L_1 \\ L'_2 = \frac{L_2}{3} \\ L'_3 = L_3 \\ L'_4 = L_4 \end{cases},$$

la matrice augmentée (1.54) devient

$$\begin{array}{l} L'_1 \\ L'_2 \\ L'_3 \\ L'_4 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \quad (1.55)$$

En effectuant les changements

$$\begin{cases} L''_1 = L'_1 - 2L'_2 \\ L''_2 = L'_2 \\ L''_3 = L'_3 \\ L''_4 = L'_4 \end{cases},$$

la matrice augmentée (1.55) devient

$$\begin{array}{l} L''_1 \\ L''_2 \\ L''_3 \\ L''_4 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

— On sélectionne le pivot de la troisième colonne

$$\begin{array}{l} L''_1 \\ L''_2 \\ L''_3 \\ L''_4 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \quad (1.56)$$

En effectuant les changements

$$\begin{cases} L_1''' = L_1'' \\ L_2''' = L_2'' \\ L_3''' = \frac{L_3''}{2} \\ L_4''' = L_4'' \end{cases},$$

la matrice augmentée (1.56) devient

$$\begin{matrix} L_1''' \\ L_2''' \\ L_3''' \\ L_4''' \end{matrix} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

— On sélectionne le pivot de la quatrième colonne

$$\begin{matrix} L_1''' \\ L_2''' \\ L_3''' \\ L_4''' \end{matrix} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{3} & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \quad (1.57)$$

En effectuant les changements

$$\begin{cases} L_1'''' = L_1''' \\ L_2'''' = L_2''' \\ L_3'''' = L_3''' \\ L_4'''' = \frac{L_4'''}{3} \end{cases},$$

la matrice augmentée (1.57) devient

$$\begin{matrix} L_1'''' \\ L_2'''' \\ L_3'''' \\ L_4'''' \end{matrix} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{array} \right) \quad (1.58)$$

En effectuant les changements

$$\begin{cases} L_1'''' = L_1'''' \\ L_2'''' = L_2'''' \\ L_3'''' = L_3'''' - \frac{1}{2}L_4'''' \\ L_4'''' = L_4'''' \end{cases}$$

la matrice augmentée (1.58) devient

$$\begin{matrix} L_1'''' \\ L_2'''' \\ L_3'''' \\ L_4'''' \end{matrix} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{array} \right)$$

• **Étape 3 : on vérifie le résultat obtenu**

On a bien

$$D \cdot D^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et

$$D^{-1} \cdot D = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 16.1

Calculer le déterminant des matrices réelles suivantes, et leur matrice inverse quand elle existe.

c)

$$\begin{pmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 6 & 7 & 9 \end{pmatrix}$$

Nommons cette matrice C . On a

$$\det C = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 6 & 7 & 9 \end{vmatrix} = 5 \times 2 \times 9 + 3 \times 3 \times 6 + 2 \times 1 \times 7 - 6 \times 2 \times 2 - 7 \times 3 \times 5 - 9 \times 1 \times 3 = 2$$

Le déterminant est non nul ce qui signifie que la matrice est inversible. Utilisons la méthode des cofacteurs pour calculer son inverse.

$$\begin{pmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 6 & 7 & 9 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det C} \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 6 & 9 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 6 & 9 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}^{\tau} \quad (1.59)$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 18-21 & -(9-18) & 7-12 \\ -(27-14) & 45-12 & -(35-18) \\ 9-4 & -(15-2) & 10-3 \end{pmatrix}^{\tau} \quad (1.60)$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -3 & 9 & -5 \\ -13 & 33 & -17 \\ 5 & -13 & 7 \end{pmatrix}^{\tau} \quad (1.61)$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & -\frac{13}{2} & \frac{5}{2} \\ \frac{9}{2} & \frac{33}{2} & -\frac{13}{2} \\ -\frac{5}{2} & -\frac{17}{2} & \frac{7}{2} \end{pmatrix} \quad (1.62)$$

Exercice 16.2

Montrer, sans développer de déterminant, les égalités :

a)

$$\det \begin{pmatrix} bc & a^2 & a^2 \\ b^2 & ac & b^2 \\ c^2 & c^2 & ab \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} bc & ab & ca \\ ab & ca & bc \\ ca & bc & ab \end{pmatrix}$$

Commençons par supposer que $a, b, c \neq 0$. On a alors

$$\begin{vmatrix} bc & a^2 & a^2 \\ b^2 & ac & b^2 \\ c^2 & c^2 & ab \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} \frac{bc}{a} & a & a \\ b^2 & ac & b^2 \\ c^2 & c^2 & ab \end{vmatrix} = ab \begin{vmatrix} \frac{bc}{a} & a & a \\ b & \frac{ac}{b} & b \\ c^2 & c^2 & ab \end{vmatrix} = abc \begin{vmatrix} \frac{bc}{a} & a & a \\ b & \frac{ac}{b} & b \\ c & c & \frac{ab}{c} \end{vmatrix} \quad (1.63)$$

$$= ab \begin{vmatrix} \frac{bc}{a} & a & ac \\ b & \frac{ac}{b} & bc \\ c & c & ab \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} \frac{bc}{a} & ab & ac \\ b & ac & bc \\ c & bc & ab \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} bc & ab & ac \\ ab & ac & bc \\ ac & bc & ab \end{vmatrix} \quad (1.64)$$

Si $a = 0$, alors

$$\det \begin{pmatrix} bc & a^2 & a^2 \\ b^2 & ac & b^2 \\ c^2 & c^2 & ab \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} bc & 0 & 0 \\ b^2 & 0 & b^2 \\ c^2 & c^2 & 0 \end{pmatrix} = -b^3 c^3 \quad (1.65)$$

qui est trivialement égal à

$$\det \begin{pmatrix} bc & 0 & 0 \\ 0 & 0 & bc \\ 0 & bc & 0 \end{pmatrix} \quad (1.66)$$

Un raisonnement similaire traite les cas $b = 0$ et $c = 0$.