

MATH-F112

Correction de la séance de TP 12

Chapitre 13

13.1 (f,g), 13.3, 13.11, 13.12, 13.18 (b)

Exercice 13.1

Parmi les applications suivantes, déterminer

- celles qui sont continues ;
- celles qui sont dérivables.

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 : t \mapsto (t^3 e^t, \operatorname{ch} t + \sin t)$$

$$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 : t \mapsto (\operatorname{arctg} t, e^{|t|})$$

Rappelons que

$$\operatorname{ch} t = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$$

La fonction f est continue sur son domaine : il s'agit d'une application du Résultat XIV.4 du syllabus. En effet, on peut écrire

$$f(t) = (f_1(t), f_2(t))$$

avec

$$\begin{aligned} f_1(t) &= t^3 e^t \\ f_2(t) &= \operatorname{ch} t + \sin t \end{aligned}$$

Or, f_1 est continue sur $\mathbb{R}$ puisqu'il s'agit du produit des fonctions t^3 et e^t continues sur $\mathbb{R}$. De plus, f_2 est continue car $\operatorname{ch} t$ et $\sin t$ sont deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$. Leur somme est donc continue.

La fonction f est aussi dérivable sur $\mathbb{R}$ tout entier par les mêmes arguments.

La fonction $g(t) = (g_1(t), g_2(t))$ avec

$$\begin{aligned} g_1(t) &= \operatorname{arctg} t \\ g_2(t) &= e^{|t|} \end{aligned}$$

Or, la fonction $\operatorname{arctg} : \mathbb{R} \rightarrow]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[: t \mapsto \operatorname{arctg} t$ est définie comme la réciproque de la fonction $\operatorname{tg} :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\rightarrow \mathbb{R} : t \mapsto \operatorname{tg} t$ continue et bijective. De plus, $\operatorname{tg}' t \neq 0$ quel que soit $t \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. On peut donc appliquer le Résultat X.9 du syllabus qui affirme que la fonction arctg est dérivable (et donc continue) sur $\mathbb{R}$.

Toutefois, la fonction valeur absolue

$$|\cdot| : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+ : t \mapsto \begin{cases} t & \text{si } t \geq 0 \\ -t & \text{si } t < 0 \end{cases}$$

est continue sur $\mathbb{R}$ mais n'est pas dérivable en 0. En effet,

$$\lim_{t \xrightarrow{<} 0} \frac{|t| - |0|}{t - 0} = \lim_{t \xrightarrow{<} 0} \frac{|t|}{t} \lim_{t \xrightarrow{<} 0} \frac{-t}{t} = -1 \quad (1.1)$$

mais

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{|t| - |0|}{t - 0} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{|t|}{t} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{t} = 1 \quad (1.2)$$

Puisque les limites à droite et à gauche diffèrent, nous concluons que la limite n'existe pas en 0 et que la fonction valeur absolue n'est pas dérivable en ce point (elle l'est partout ailleurs). On trouve alors que la fonction $e^{|t|}$ est dérivable partout sauf en 0, et continue partout :

$$\lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{e^{|t|} - e^{|0|}}{t - 0} = \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{e^{-t} - 1}{t} = \frac{0}{0} \quad (1.3)$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{(e^{-t} - 1)'}{t'} \quad \text{par la règle de l'Hospital} \quad (1.4)$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{(e^{-t})'}{1} \quad (1.5)$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0^-} -e^{-t} = -1 \quad (1.6)$$

mais

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{e^{|t|} - e^{|0|}}{t - 0} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{e^t - 1}{t} = \frac{0}{0} \quad (1.7)$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{(e^t - 1)'}{t'} \quad \text{par la règle de l'Hospital} \quad (1.8)$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{(e^t)'}{1} \quad (1.9)$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0^+} e^t = 1 \quad (1.10)$$

Nous sommes donc en mesure de conclure que la fonction g est continue sur $\mathbb{R}$, mais dérivable seulement sur $\mathbb{R}_0$.

Exercice 13.3

Dans le plan $\mathbb{R}^2$ muni de la base orthonormée canonique $\vec{e}_1, \vec{e}_2$, le vecteur

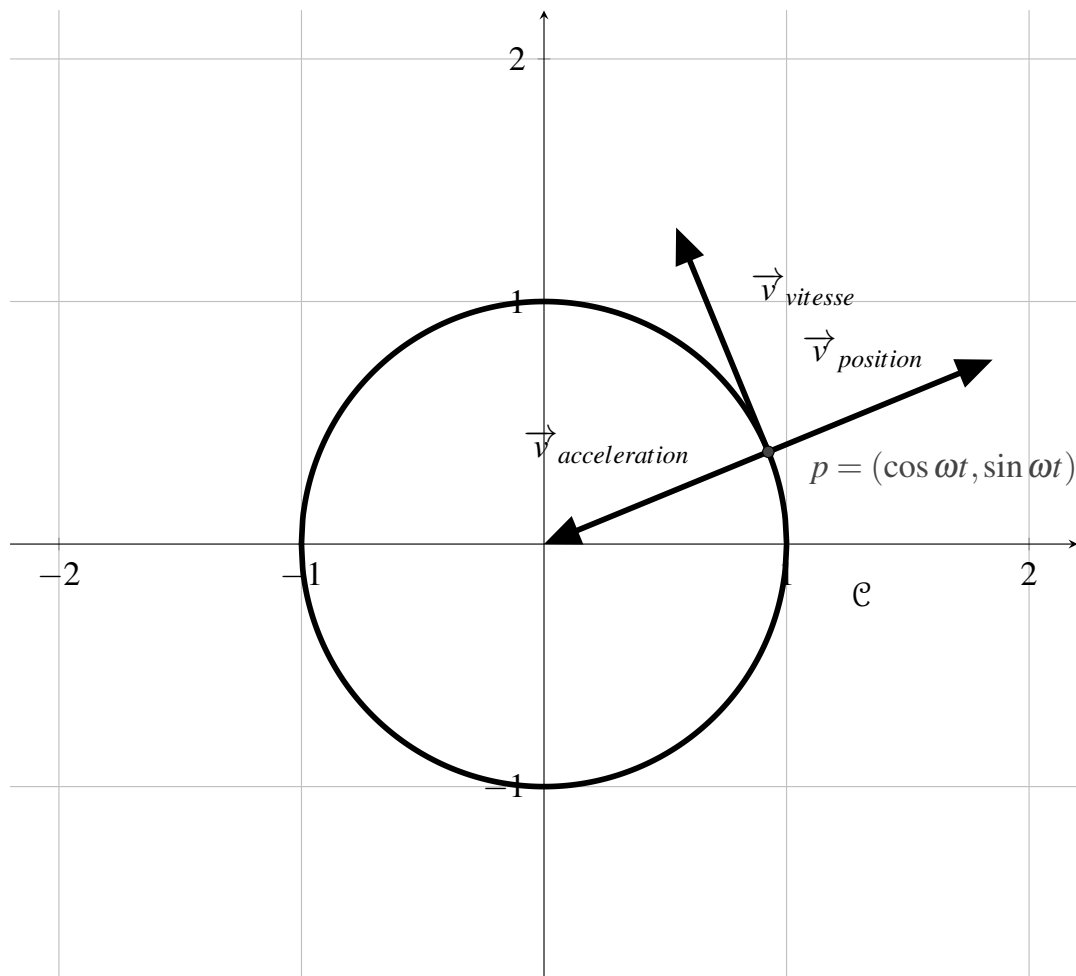
$$\vec{op} = \cos \omega t \vec{e}_1 + \sin \omega t \vec{e}_2$$

donne la position du point p en fonction du temps t (avec ω constante réelle non nulle). Montrer que

- à chaque instant, le vecteur vitesse est perpendiculaire au vecteur position ;
- le vecteur accélération est dirigé vers l'origine de $\mathbb{R}^2$, et est de norme constante.

Quel est le mouvement du point ?

Le vecteur position est donné par $(\cos \omega t, \sin \omega t)$. Le vecteur vitesse est donné par la dérivée de la position, soit $(-\omega \sin \omega t, \omega \cos \omega t)$ et le vecteur accélération est donné par la dérivée du vecteur vitesse, soit $(-\omega^2 \cos \omega t, -\omega^2 \sin \omega t)$.

FIGURE 1.1 – La courbe du mouvement de p avec $\omega = 1$.

Le produit scalaire des vecteurs position et vitesse est

$$\langle (\cos \omega t, \sin \omega t), (-\omega \sin \omega t, \omega \cos \omega t) \rangle = -\omega \cos \omega t \sin \omega t + \omega \sin \omega t \cos \omega t = 0 \quad (1.11)$$

Comme ce produit scalaire est nul, on conclut que les vecteurs sont orthogonaux, puisqu'aucun des deux n'est le vecteur trivial. D'autre part, le vecteur accélération est l'opposé du vecteur position $\vec{op}$. Placé au point p , il pointe donc vers l'origine. Enfin, la norme du vecteur vitesse est

$$\|(-\omega^2 \cos \omega t, -\omega^2 \sin \omega t)\| = \sqrt{(-\omega^2 \cos \omega t)^2 + (-\omega^2 \sin \omega t)^2} \quad (1.12)$$

$$= \sqrt{\omega^4 (\sin^2 \omega t + \cos^2 \omega t)} \quad (1.13)$$

$$= \sqrt{\omega^4} \quad (1.14)$$

$$= \omega^2 \quad (1.15)$$

et est donc bien constante.

Le mouvement du point p décrit bien entendu un cercle de rayon 1 centré en $(0,0)$.

Exercice 13.11

Montrer que toutes les tangentes à l'hélice de $\mathbb{R}^3$ d'équations paramétriques

$$\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3 : t \mapsto \begin{cases} x = a \cos t \\ y = a \sin t \\ z = bt \end{cases}$$

coupent le plan oxy sous le même angle.

Les Figures 1.2 et 1.3 montrent une représentation de la courbe γ avec les paramètres a et b valant tous les deux 1.

Un vecteur tangent à l'hélice est donné par

$$(-a \sin t, a \cos t, b).$$

L'angle qu'il forme avec le plan oxy correspond à l'angle formé entre ce vecteur et sa projection perpendiculaire sur oxy (voir Figure 1.4).

Pour connaître l'angle d'amplitude θ formé entre deux vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$, on utilise le produit scalaire

$$\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = \|\vec{v}\| \|\vec{w}\| \cos \theta \quad (1.16)$$

L'angle cherché est donc livré par

$$\theta = \arccos \left(\frac{\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle}{\|\vec{v}\| \|\vec{w}\|} \right) \quad (1.17)$$

Le vecteur tangent au point $\gamma(t)$ est donné par $\gamma'(t) = (-a \sin t, a \cos t, b)$ et sa projection sur oxy est $(-a \sin t, a \cos t, 0)$. On peut donc calculer

$$\langle (-a \sin t, a \cos t, b), (-a \sin t, a \cos t, 0) \rangle = a^2 \sin^2 t + a^2 \cos^2 t + 0 \quad (1.18)$$

$$= a^2 (\sin^2 t + \cos^2 t) \quad (1.19)$$

$$= a^2 \quad (1.20)$$

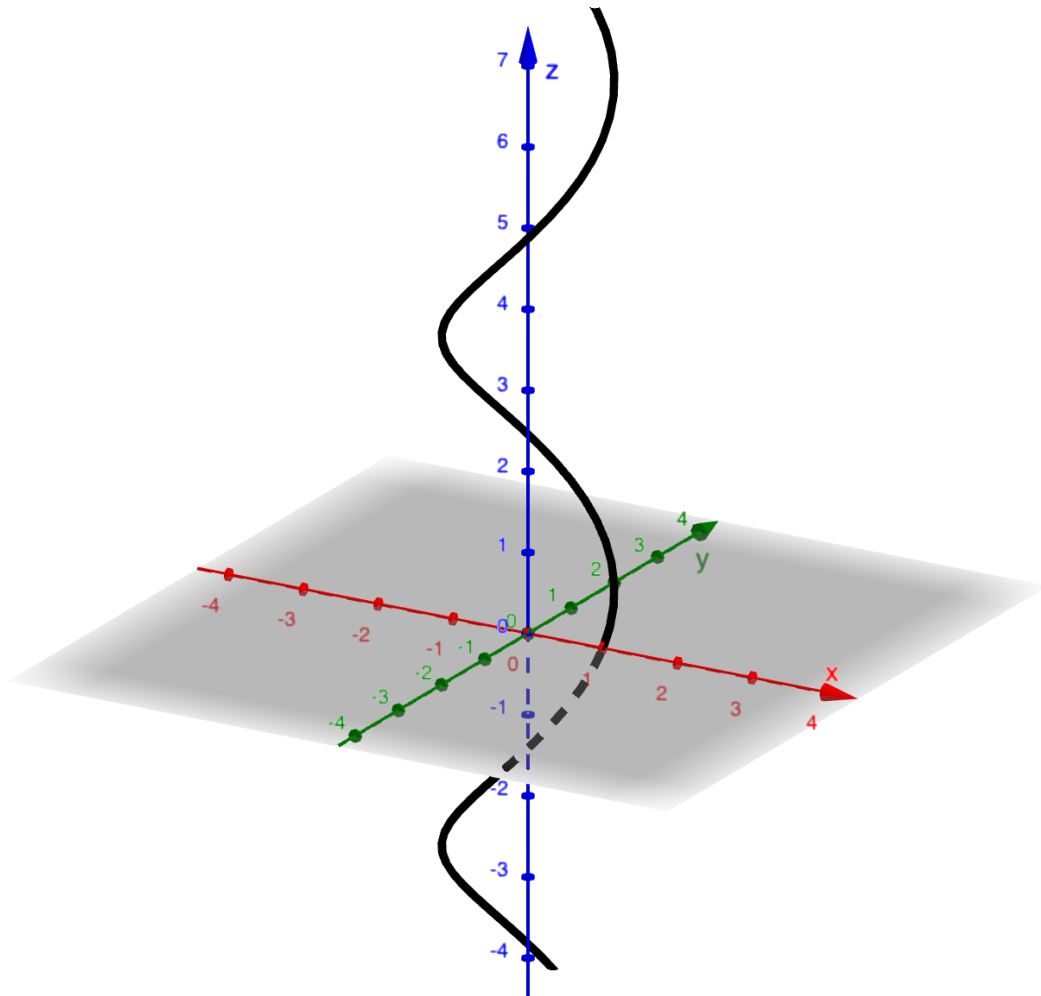


FIGURE 1.2 – Une vue de l'hélice

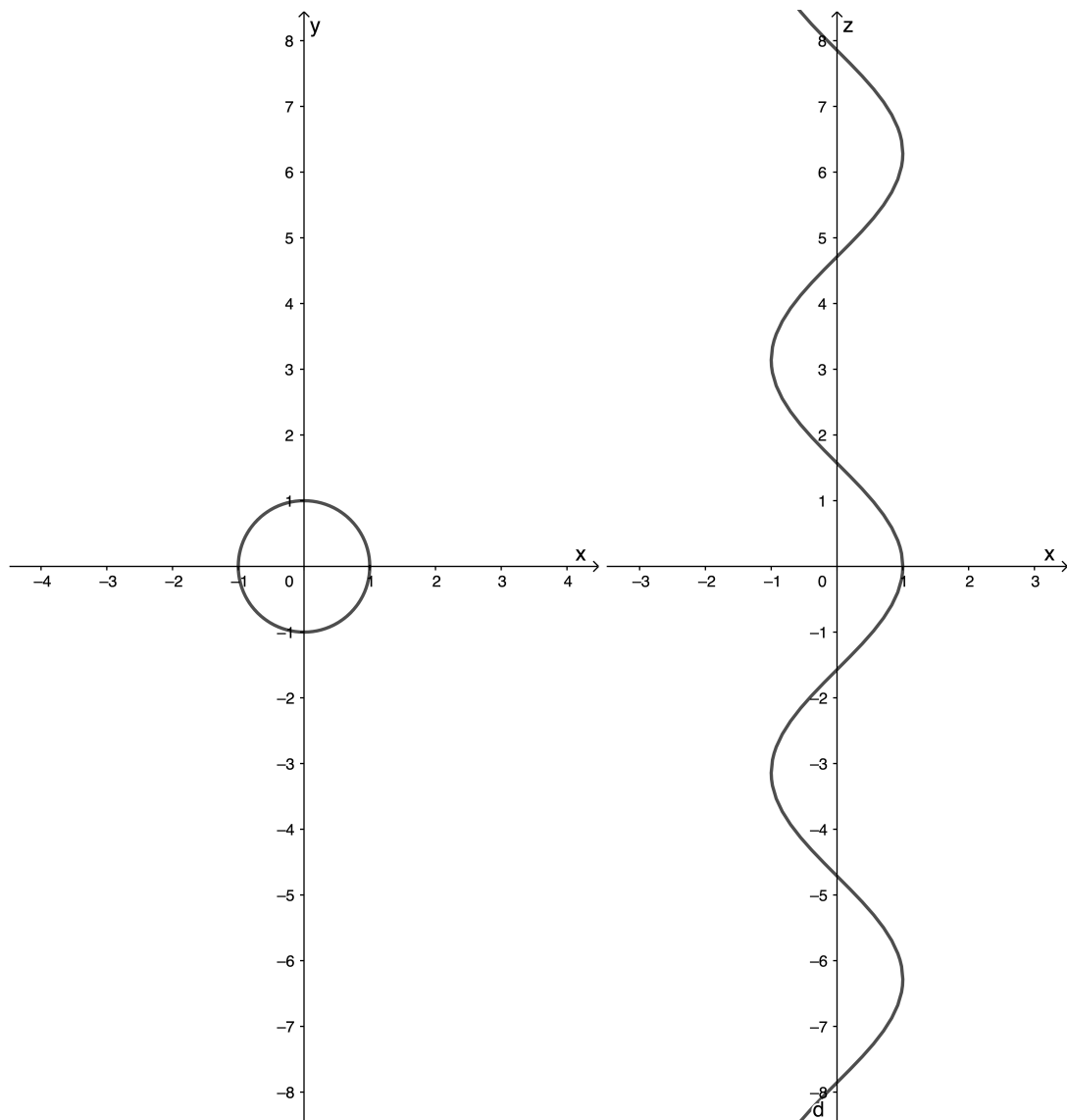


FIGURE 1.3 – Une vue face à oxy (gauche) et une face à oxz de l'hélice

D'autre part,

$$\|(-a \sin t, a \cos t, b)\| = \sqrt{a^2 \sin^2 t + a^2 \cos^2 t + b^2} = \sqrt{a^2 + b^2} \quad (1.21)$$

et

$$\|(-a \sin t, a \cos t, 0)\| = \sqrt{a^2 \sin^2 t + a^2 \cos^2 t + 0} = \sqrt{a^2} = |a| \quad (1.22)$$

Dès lors,

$$\theta = \arccos \left(\frac{a^2}{|a| \sqrt{a^2 + b^2}} \right) = \arccos \frac{|a|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad (1.23)$$

Comme a et b sont des constantes, on conclut que θ est constant.

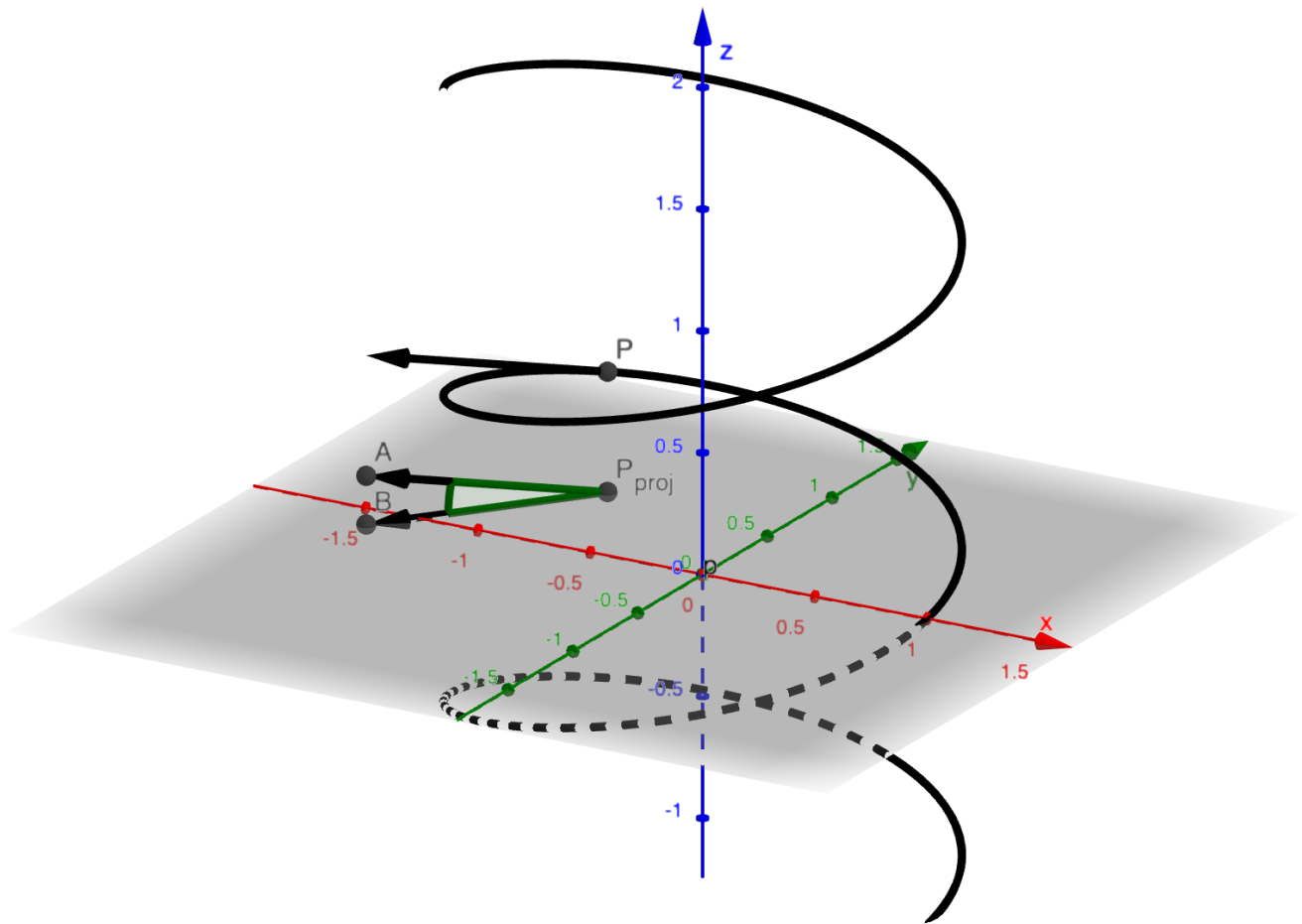


FIGURE 1.4 – Hélice $\gamma(t)$ avec les paramètres $a = 1$ et $b = 0.2$. Un vecteur tangent est donné au point P sur γ et est reproduit sur le plan oxy , depuis P_{proj} la projection perpendiculaire de P sur oxy . L'angle cherché est celui formé par les vecteurs $\overrightarrow{P_{\text{proj}}A}$ et $\overrightarrow{P_{\text{proj}}B}$.

Exercice 13.12

Trouver le vecteur tangent, les équations de la tangente, et l'équation du plan normal au point $(3, 9, 27)$ de la courbe paramétrée de $\mathbb{R}^3$ donnée par

$$\vec{op} = t\vec{e}_1 + t^2\vec{e}_2 + t^3\vec{e}_3$$

(où $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ est la base canonique).

Nous pouvons écrire le vecteur

$$\vec{op} = (t, t^2, t^3)$$

et donc le vecteur tangent à p comme

$$(1, 2t, 3t^2).$$

Au point $(3, 3^2, 3^3) = (3, 9, 27)$ (soit quand $t = 3$), ce vecteur est $(1, 6, 27)$. Les équations paramétriques de la droite tangente à la courbe au point $(3, 9, 27)$ sont donc données par

$$\begin{cases} x = 3 + \lambda \\ y = 9 + 6\lambda \\ z = 27 + 27\lambda \end{cases} \quad (1.24)$$

et ses équations cartésiennes par

$$\frac{x-3}{1} = \frac{y-9}{6} = \frac{z-27}{27} \quad (1.25)$$

Le plan normal à la courbe en ce point est normal au vecteur tangent à la courbe. Son équation est donc de la forme

$$x + 6y + 27z + d = 0.$$

Comme le point $(3, 9, 27)$ est sur le plan, on déduit que

$$3 + 54 + 729 = -d$$

et donc que l'équation cartésienne du plan est

$$x + 6y + 27z = 786.$$

La Figure 1.5 illustre la situation pour un point quelconque.

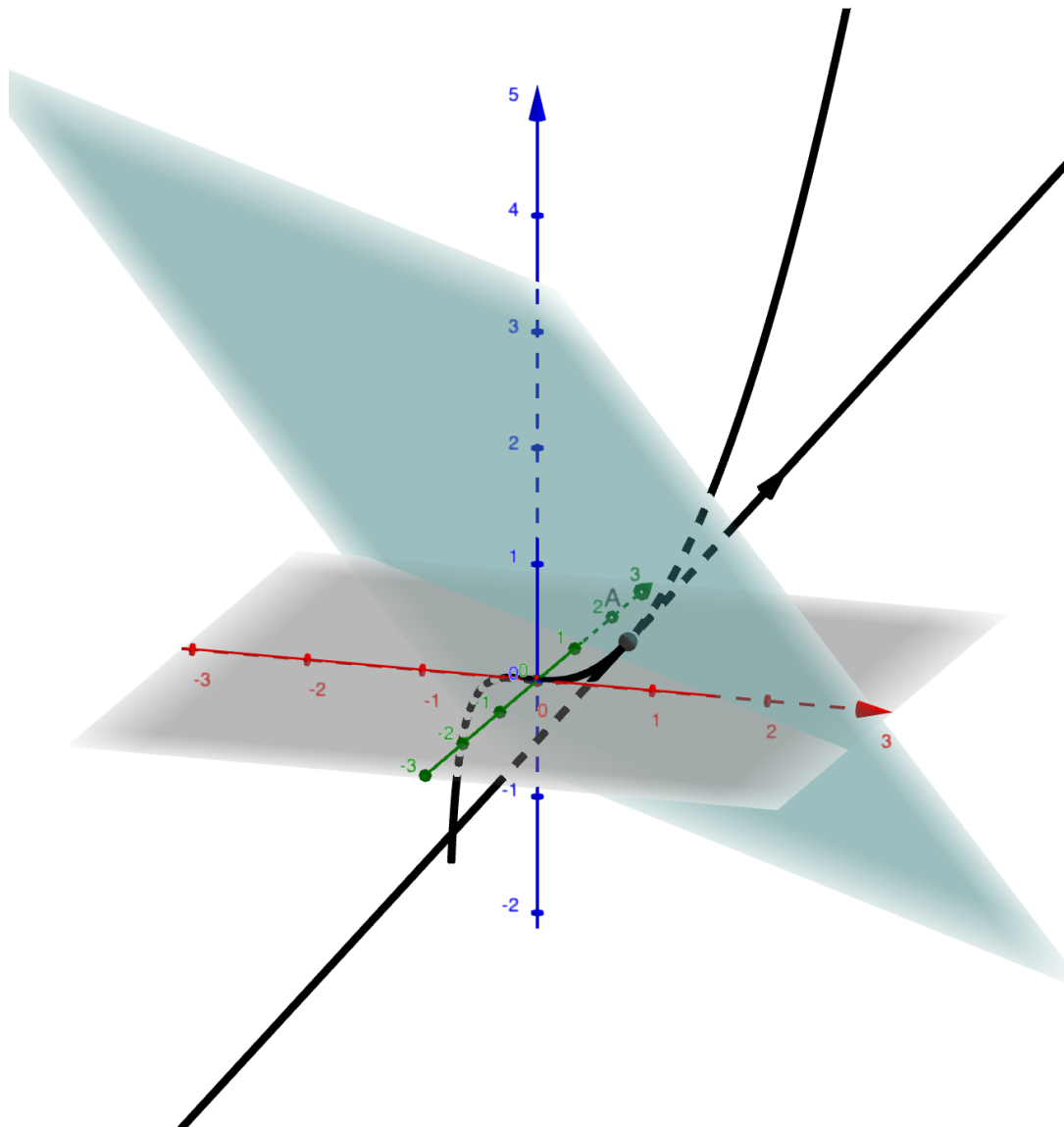


FIGURE 1.5 – La courbe paramétrée (t, t^2, t^3) , un vecteur tangent, la droite tangente et le plan normal en un point A

Exercice 13.18

Par intégration, calculer la longueur des arcs de courbes paramétrées suivants :

b. $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2 : t \mapsto (2 - \cos 6t, 3 + \sin 6t)$

La longueur du chemin est donnée par la formule ¹

$$\int_0^1 \|\gamma'(t)\| dt = \int_0^1 \sqrt{\langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle} dt \quad (1.26)$$

$$= \int_0^1 \sqrt{(6 \sin 6t)^2 + (6 \cos 6t)^2} dt \quad (1.27)$$

$$= \int_0^1 \sqrt{36 \sin^2 6t + 36 \cos^2 6t} dt \quad (1.28)$$

$$= \int_0^1 6 dt \quad (1.29)$$

$$= [6t]_0^1 \quad (1.30)$$

$$= 6 \quad (1.31)$$

1. Voir Section 2.5 du Chapitre XIV.