

MATH-F112

Correction de la séance de TP 13

Chapitre 17

17.1 (l), 17.7 (a), 17.18 (h,j), 17.27 , 17.35 (a)

Exercice 17.1

Faites un schéma du plus grand domaine de la fonction et de quelques-unes des lignes de niveau

$$l : (x, y) \mapsto \ln(xy)$$

La condition d'existence de l'expression $\ln(xy)$ est que $xy > 0$, ce qui est équivalent à réclamer que $x < 0$ et $y < 0$, ou bien $x > 0$ et $y > 0$. Le domaine de l est donc $(\mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}_0^+) \cup (\mathbb{R}_0^- \times \mathbb{R}_0^-)$. Autrement dit, il s'agit de l'union des premier et troisième quadrants du plan.

La courbe de niveau z_0 correspond à l'intersection du plan $z = z_0$ avec la courbe de la fonction $\ln(xy)$. Nous avons tracé dans la Figure 1.1 les quatre plans $z = -1$, $z = 0$, $z = 1$ et $z = 2$ et avons mis en évidence leurs intersections respectives avec la courbe $\ln(xy)$. Dans la Figure 1.2, nous avons représenté les courbes de niveaux dans le plan $\mathbb{R}^2$.

- En $z = -1$, on a $-1 = \ln(xy) \Leftrightarrow \frac{1}{e} = xy \Leftrightarrow y = \frac{1}{ex}$
- En $z = 0$, on a $0 = \ln(xy) \Leftrightarrow 1 = xy \Leftrightarrow y = \frac{1}{x}$
- En $z = 1$, on a $1 = \ln(xy) \Leftrightarrow e = xy \Leftrightarrow y = \frac{e}{x}$
- En $z = 2$, on a $2 = \ln(xy) \Leftrightarrow e^2 = xy \Leftrightarrow y = \frac{e^2}{x}$

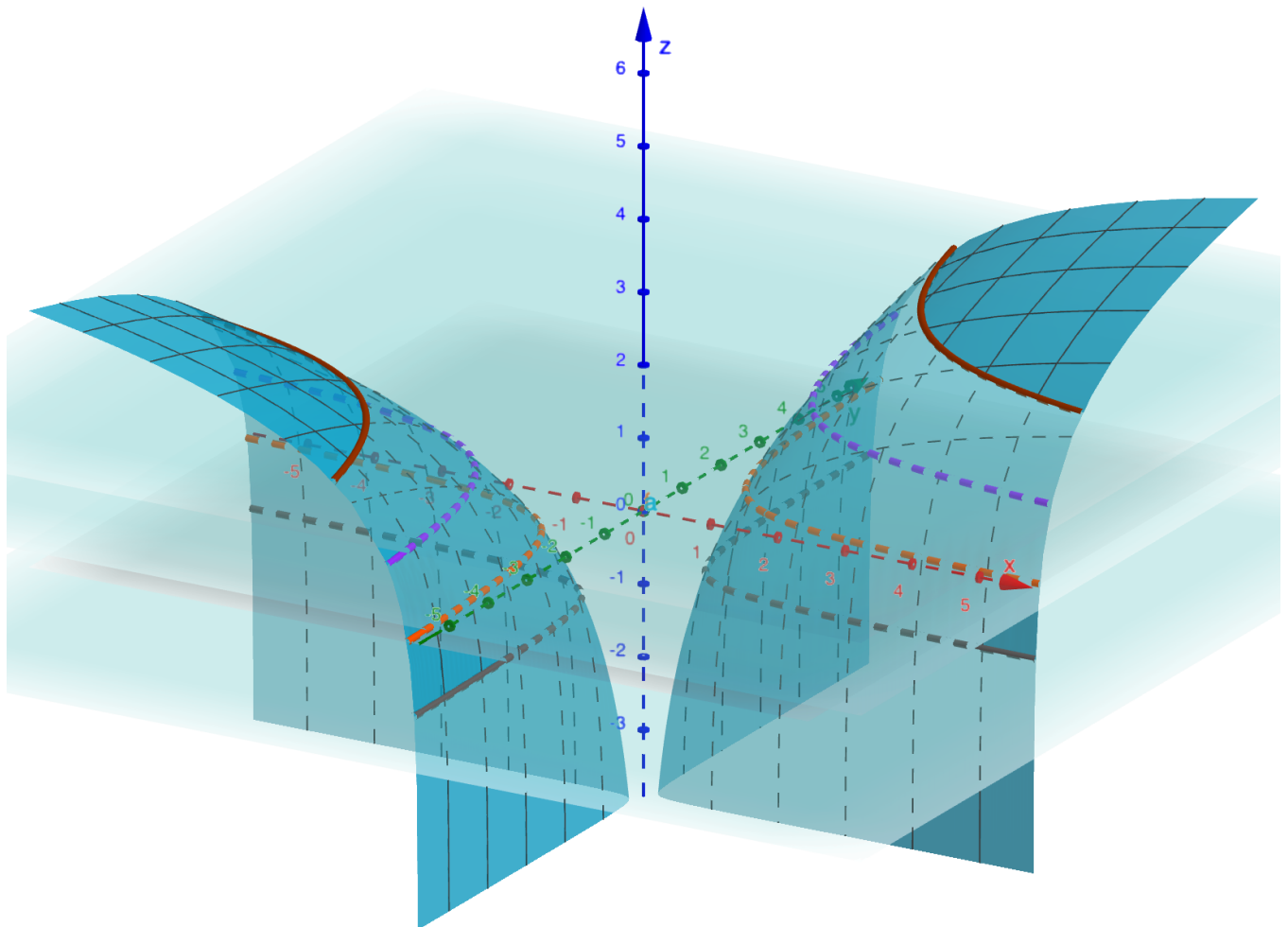


FIGURE 1.1 – Les courbes de niveaux en $z = -1$, $z = 0$, $z = 1$ et $z = 2$

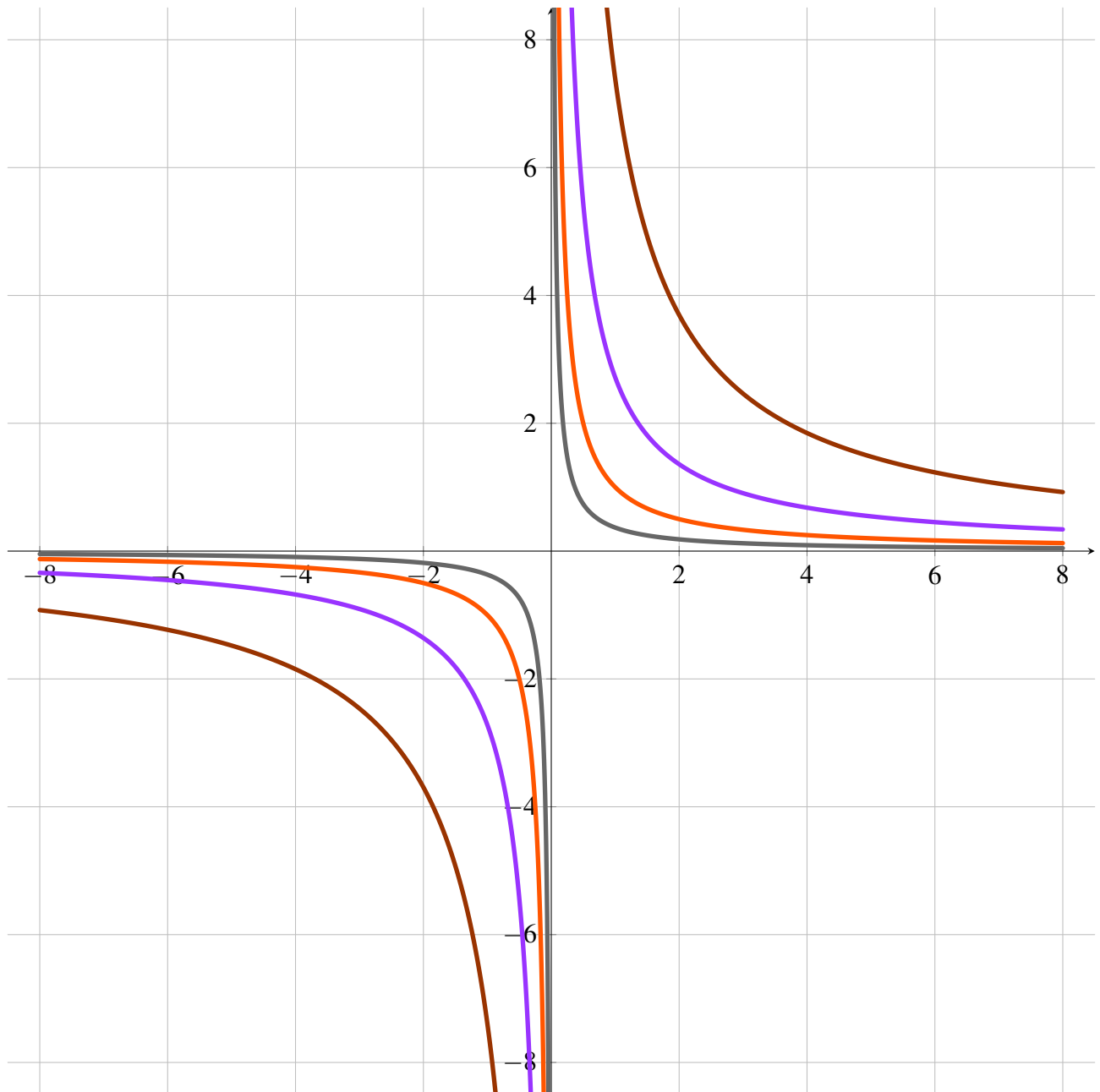


FIGURE 1.2 – Les courbes de niveaux $y = \frac{1}{ex}$, $y = \frac{1}{x}$, $y = \frac{e}{x}$ et $y = \frac{e^2}{x}$

Exercice 17.7

Si $f(x, y) = \cos^2(x + 3y)^2$, que vaut

1. $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$?

On applique successivement la règle de dérivation en chaîne :

$$\frac{\partial}{\partial x} \cos^2(x + 3y)^2 = 2 \left(\frac{\partial}{\partial x} \cos(x + 3y)^2 \right) \cos(x + 3y)^2 \quad (1.1)$$

$$= 2 \left(\frac{\partial (x + 3y)^2}{\partial x} (-\sin(x + 3y)^2) \right) \cos(x + 3y)^2 \quad (1.2)$$

$$= -4(x + 3y) \sin(x + 3y)^2 \cos(x + 3y)^2 \quad (1.3)$$

ou alternativement en utilisant la propriété $\sin 2a = 2 \sin a \cos a$:

$$= -2(x + 3y) \sin(2(x + 3y)^2) \quad (1.4)$$

Dès lors,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0 \quad (1.5)$$

Exercice 17.18

Calculer les dérivées premières et les dérivées partielles secondes des fonctions :

$$h : \mathbb{R}^+ \setminus \{0\} \times \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \mapsto \ln(xy^2)$$

$$j : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \mapsto \cos(xy^2)$$

Les dérivées premières de h sont les suivantes :

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \ln(xy^2) \quad (1.6)$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial x} xy^2 \right) \frac{1}{xy^2} \quad (1.7)$$

$$= (y^2) \frac{1}{xy^2} \quad (1.8)$$

$$= \frac{1}{x} \quad (1.9)$$

$$\frac{\partial h}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \ln(xy^2) \quad (1.10)$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial y} xy^2 \right) \frac{1}{xy^2} \quad (1.11)$$

$$= (2xy) \frac{1}{xy^2} \quad (1.12)$$

$$= \frac{2}{y} \quad (1.13)$$

Les dérivées secondes de h sont les suivantes :

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{x} = \frac{-1}{x^2} \quad (1.14)$$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{x} = 0 \quad (1.15)$$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{2}{y} = 0 \quad (1.16)$$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{2}{y} = \frac{-2}{y^2} \quad (1.17)$$

Les dérivées premières de j sont les suivantes :

$$\frac{\partial j}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \cos(xy^2) \quad (1.18)$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial x} xy^2 \right) (-\sin(xy^2)) \quad (1.19)$$

$$= -y^2 \sin(xy^2) \quad (1.20)$$

$$\frac{\partial j}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \cos(xy^2) \quad (1.21)$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial y} xy^2 \right) (-\sin(xy^2)) \quad (1.22)$$

$$= -2xy \sin(xy^2) \quad (1.23)$$

Les dérivées secondes de j sont les suivantes :

$$\frac{\partial^2 j}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} (-y^2 \sin(xy^2)) \quad (1.24)$$

$$= -y^2 \left(\frac{\partial}{\partial x} \sin(xy^2) \right) \quad (1.25)$$

$$= -y^2 \left(\frac{\partial}{\partial x} (xy^2) \right) \cos(xy^2) \quad (1.26)$$

$$= -y^2 (y^2) \cos(xy^2) \quad (1.27)$$

$$= -y^4 \cos(xy^2) \quad (1.28)$$

$$\quad (1.29)$$

$$\frac{\partial^2 j}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} (-y^2 \sin(xy^2)) \quad (1.30)$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial y} (-y^2) \right) \sin(xy^2) + (-y^2) \left(\frac{\partial}{\partial y} \sin(xy^2) \right) \quad (1.31)$$

$$= (-2y) \sin(xy^2) - y^2 \left(\frac{\partial}{\partial y} xy^2 \right) \cos(xy^2) \quad (1.32)$$

$$= -2y \sin(xy^2) - 2xy^3 \cos(xy^2) \quad (1.33)$$

$$\quad (1.34)$$

$$\frac{\partial^2 j}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} (-2xy \sin(xy^2)) \quad (1.35)$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial x} (-2xy) \right) \sin(xy^2) + (-2xy) \left(\frac{\partial}{\partial x} \sin(xy^2) \right) \quad (1.36)$$

$$= (-2y) \sin(xy^2) - 2xy \left(\frac{\partial}{\partial x} xy^2 \right) \cos(xy^2) \quad (1.37)$$

$$= -2y \sin(xy^2) - 2xy^3 \cos(xy^2) \quad (1.38)$$

$$\quad (1.39)$$

$$\frac{\partial^2 j}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} (-2xy \sin(xy^2)) \quad (1.40)$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial y} (-2xy) \right) \sin(xy^2) + (-2xy) \left(\frac{\partial}{\partial y} \sin(xy^2) \right) \quad (1.41)$$

$$= (-2x) \sin(xy^2) + (-2xy) \left(\frac{\partial}{\partial y} (xy^2) \right) \cos(xy^2) \quad (1.42)$$

$$= -2x \sin(xy^2) - 2xy(2xy) \cos(xy^2) \quad (1.43)$$

$$= -2x \sin(xy^2) - 4x^2y^2 \cos(xy^2) \quad (1.44)$$

Exercice 17.27

Calculer au point $(1, 2, 1)$ la dérivée de la fonction

$$g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} : (u, v, w) \mapsto u^2 - 3vw + 5$$

dans la direction orientée faisant le même angle inférieur à $\frac{\pi}{2}$ avec chacun des demi-axes positifs de coordonnée.

Soit $\vec{v} = (a, b, c)$ un vecteur formant un angle d'amplitude $\theta < \frac{\pi}{2}$ avec chacun des demi-axes positifs. Le produit scalaire de $\vec{v}$ avec le vecteur de base $\vec{e}_i$ est

$$\langle \vec{v}, \vec{e}_i \rangle = \|\vec{v}\| \|\vec{e}_i\| \cos \theta = \|\vec{v}\| \cos \theta$$

Dès lors

$$\begin{cases} \langle \vec{v}, \vec{e}_1 \rangle = \|\vec{v}\| \cos \theta \\ \langle \vec{v}, \vec{e}_2 \rangle = \|\vec{v}\| \cos \theta \\ \langle \vec{v}, \vec{e}_3 \rangle = \|\vec{v}\| \cos \theta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \langle (a, b, c), (1, 0, 0) \rangle = \|\vec{v}\| \cos \theta \\ \langle (a, b, c), (0, 1, 0) \rangle = \|\vec{v}\| \cos \theta \\ \langle (a, b, c), (0, 0, 1) \rangle = \|\vec{v}\| \cos \theta \end{cases} \quad (1.45)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = \|\vec{v}\| \cos \theta \\ b = \|\vec{v}\| \cos \theta \\ c = \|\vec{v}\| \cos \theta \end{cases} \quad (1.46)$$

$$\Rightarrow a = b = c \quad (1.47)$$

La dérivée de g dans la direction $\vec{v} = (a, a, a)$ au point $(1, 2, 1)$ est donc ¹

$$\frac{\partial g}{\partial \vec{v}}(1, 2, 1) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{g((1, 2, 1) + t(a, a, a)) - g(1, 2, 1)}{t} \quad (1.48)$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-7ta - 2t^2a^2}{t} \quad (1.49)$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} (-7a - 2ta^2) \quad (1.50)$$

$$= -7a \quad (1.51)$$

Alternativement, on peut aussi utiliser le produit scalaire entre $\nabla g(1, 2, 1)$ et $\vec{v}$: le gradient de g est

$$\left(\frac{\partial g}{\partial u}, \frac{\partial g}{\partial v}, \frac{\partial g}{\partial w} \right) = (2u, -3w, -3v) \quad (1.52)$$

et donc

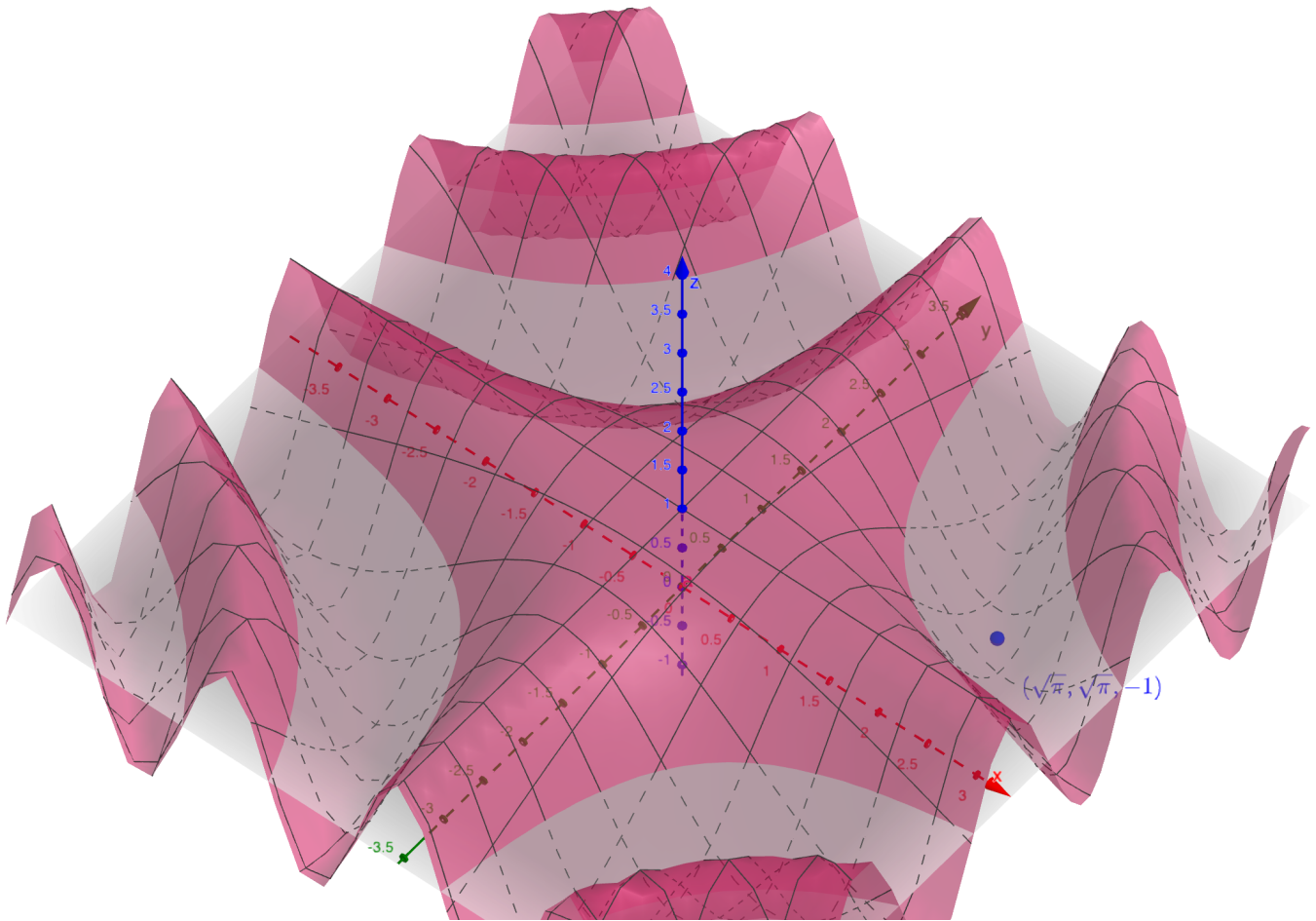
$$\frac{\partial g}{\partial \vec{v}}(1, 2, 1) = \langle \nabla g(1, 2, 1), \vec{v} \rangle \quad (1.53)$$

$$= \left\langle \left(\frac{\partial g}{\partial u}(1, 2, 1), \frac{\partial g}{\partial v}(1, 2, 1), \frac{\partial g}{\partial w}(1, 2, 1) \right), (a, a, a) \right\rangle \quad (1.54)$$

$$= \langle (2, -3, -6), (a, a, a) \rangle \quad (1.55)$$

$$= -7a \quad (1.56)$$

1. Définition XVI.8 dans le syllabus.

FIGURE 1.3 – La fonction $\cos(xy)$

Exercice 17.35

Au point indiqué, dans quelle direction orientée la fonction augmente-t-elle le plus ?

a) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \mapsto \cos(xy)$ au point $(\sqrt{\pi}, \sqrt{\pi})$.

Le gradient de la fonction indique la direction orientée dans laquelle la fonction augmente le plus².

$$\nabla f(x, y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right) \quad (1.57)$$

$$= (-y \sin(xy), -x \sin(xy)) \quad (1.58)$$

Au point $(\sqrt{\pi}, \sqrt{\pi})$, le gradient vaut

$$\nabla f(\sqrt{\pi}, \sqrt{\pi}) = (-\pi \sin(\pi), -\pi \sin(\pi)) = (0, 0) \quad (1.59)$$

Le gradient est donc nul : la fonction ne croît dans aucune direction. La Figure 1.3 illustre le graphique de la fonction $\cos(xy)$.

2. Voir Résultat XVI.12 dans le syllabus.