

MATH-F112

Correction de la séance de TP 14

Chapitres 20 et 19

20.1, 20.2, 20.3 (a), 19.1 (e), 19.2 (b,d,f,h) 19.5 (a,c) 19.6, 19.8 (b)

Optimisation à deux variables

Exercice 20.1

Déterminer les points critiques de la fonction f définie par

$$f(x, y) = (x - 1)y(y - x)$$

et déterminer leur nature (min, max, ni min ni max).

Calculons les dérivées partielles de f .

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (xy^2 - x^2y - y^2 + xy) \quad (1.1)$$

$$= y^2 - 2xy + y \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} (xy^2 - x^2y - y^2 + xy) \quad (1.3)$$

$$= 2xy - x^2 - 2y + x \quad (1.4)$$

Les dérivées partielles secondes sont les suivantes :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -2y \quad (1.5)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2x - 2 \quad (1.6)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2y - 2x + 1 \quad (1.7)$$

La matrice hessienne de la fonction f est donc

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2y & 2y - 2x + 1 \\ 2y - 2x + 1 & 2x - 2 \end{pmatrix} \quad (1.8)$$

Les points critiques sont ceux en lesquels le gradient ∇f s'annule :

$$\nabla f(x, y) = (0, 0) \Leftrightarrow (y^2 - 2xy + y, 2xy - x^2 - 2y + x) = (0, 0) \quad (1.9)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y(y - 2x + 1) = 0 \\ 2xy - x^2 - 2y + x = 0 \end{cases} \quad (1.10)$$

La première équation livre deux cas possibles : soit $y = 0$, soit $y \neq 0$.

- Si $y = 0$, alors

$$\begin{cases} y(y - 2x + 1) = 0 \\ 2xy - x^2 - 2y + x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} - \\ -x^2 + x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} - \\ x = 0 \end{cases} \text{ ou } x = 1 \quad (1.11)$$

On trouve donc deux solutions à ce système : $(1, 0)$ et $(0, 0)$.

- Si $y \neq 0$, alors

$$\begin{cases} y(y-2x+1) = 0 \\ 2xy-x^2-2y+x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (y-2x+1) = 0 \\ 2xy-x^2-2y+x = 0 \end{cases} \quad (1.12)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x-1 \\ 2x(2x-1)-x^2-2(2x-1)+x = 0 \end{cases} \quad (1.13)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x-1 \\ 3x^2-5x+2 = 0 \end{cases} \quad (1.14)$$

La seconde équation admet deux solutions : 1 et $\frac{2}{3}$. Le système admet donc les solutions (1, 1) et $(\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$.

Les points critiques de f sont donc

$$(1, 0), (0, 0), (1, 1) \text{ et } \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

Nous utilisons maintenant le Résultat XVI.17. Le déterminant δ de la Hessienne de f est

$$\delta = \begin{vmatrix} -2y & 2y-2x+1 \\ 2y-2x+1 & 2x-2 \end{vmatrix} \quad (1.15)$$

$$= -2y(2x-2) - (2y-2x+1)^2 \quad (1.16)$$

$$= 4xy - 4y^2 - 4x^2 + 4x - 1 \quad (1.17)$$

- En (0, 0), on calcule $\delta < 0$. La fonction n'admet donc pas d'extremum en ce point.
- En (1, 0), on calcule $\delta < 0$. La fonction n'admet donc pas d'extremum en ce point.
- En (1, 1), on calcule $\delta < 0$. La fonction n'admet donc pas d'extremum en ce point.
- En $(\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$, on calcule $\delta > 0$. Or,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right) = \frac{-2}{3} < 0 \quad (1.18)$$

La fonction f admet donc un maximum local strict en $(\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$.

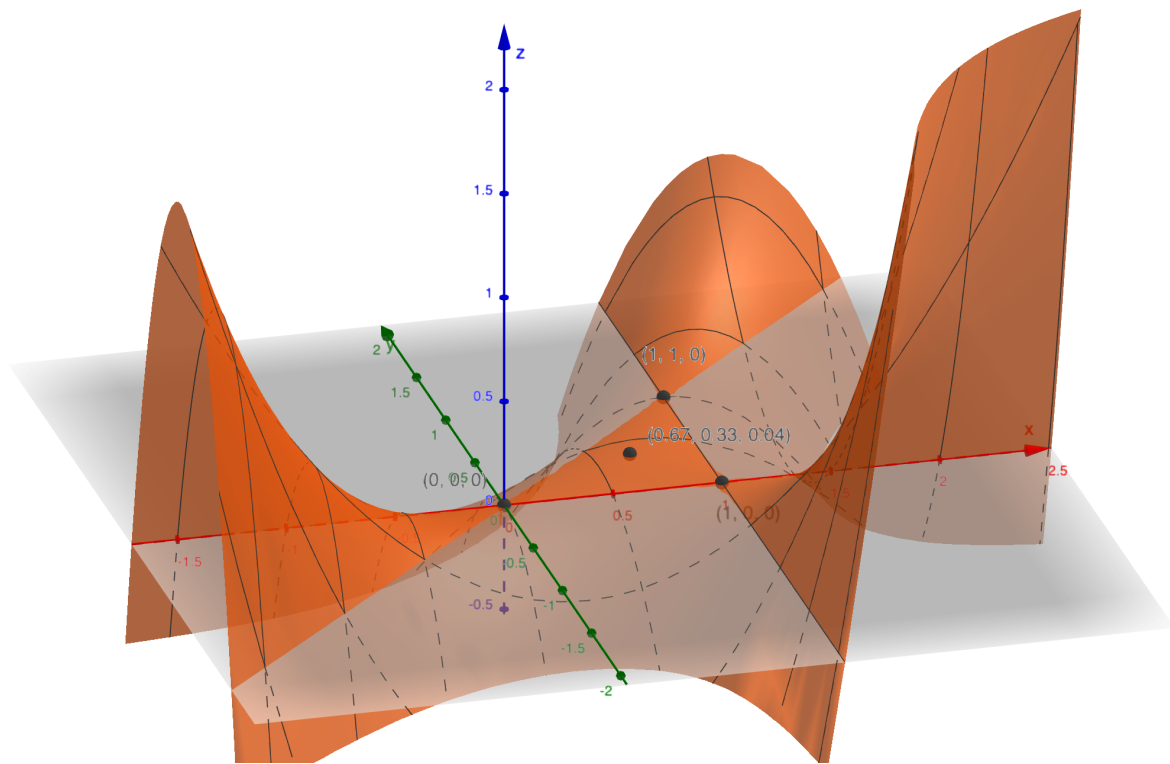


FIGURE 1.1 – La fonction $f : (x, y) \mapsto (x-1)y(y-x)$ et ses points critiques

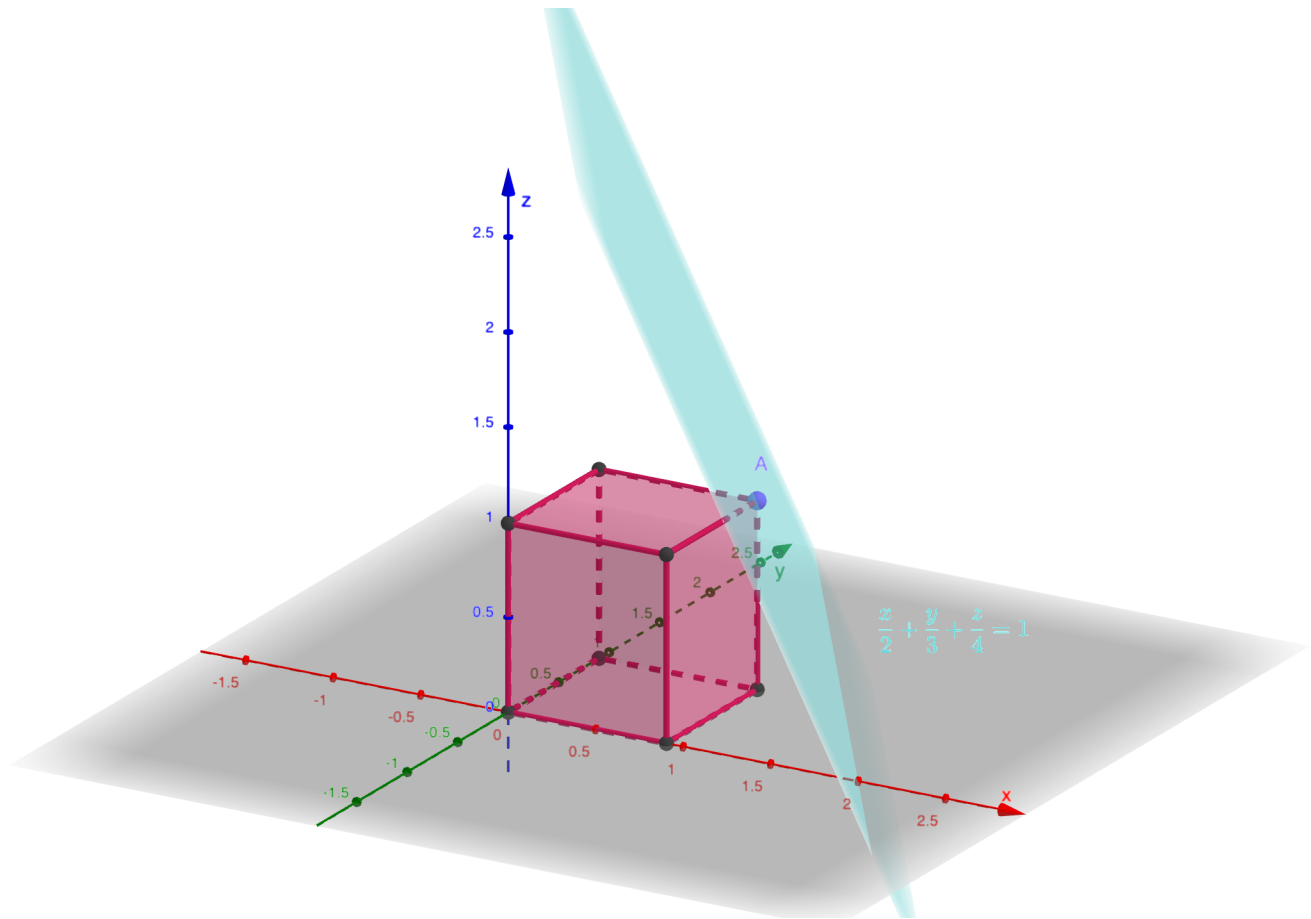


FIGURE 1.2 – Le point A est « mobile » dans le plan $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{4} = 1$

Exercice 20.2

Calculez le volume de la plus spacieuse boîte de forme parallélépipède rectangle dont trois côtés sont sur les axes, dont un coin est l'origine du système d'axes orthonormés $Oxyz$ et dont le coin opposé (x, y, z) est dans le morceau de plan d'équation

$$\left\{ (x, y, z) \in (\mathbb{R}_0^+)^3 \mid \frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{4} = 1 \right\}$$

La Figure 1.2 illustre la situation : le point A est « mobile » dans le plan $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{4} = 1$ et le but de l'exercice est de déterminer ses coordonnées de façon à maximiser le volume du parallélépipède rectangle qu'il définit avec les demi-axes positifs.

On peut réécrire l'équation du plan dans lequel le point $A = (x, y, z)$ évolue comme

$$z = 4 - 2x - \frac{4y}{3} \quad (1.19)$$

Le volume du parallélépipède rectangle est le produit des coordonnées de A, soit

$$xyz = xy \left(4 - 2x - \frac{4y}{3} \right) \quad (1.20)$$

En d'autres termes, le volume du parallélépipède rectangle en fonction du point A est donné par la fonction

$$V : \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \mapsto xy \left(4 - 2x - \frac{4y}{3} \right) \quad (1.21)$$

Nous sommes donc à la recherche d'un maximum (s'il existe) de la fonction V . Pour cela nous voulons appliquer le Résultat XVI.17 du syllabus. Il nous faut donc calculer le gradient ∇V et la Hessienne de V .

Le gradient de V est

$$\nabla V(x, y) = \left(\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y} \right) \quad (1.22)$$

$$= \left(4y - 4xy - \frac{4}{3}y^2, 4x - 2x^2 - \frac{8}{3}xy \right) \quad (1.23)$$

Déterminons maintenant les points critiques de V :

$$\nabla V(x, y) = (0, 0) \Leftrightarrow \left(4y - 4xy - \frac{4}{3}y^2, 4x - 2x^2 - \frac{8}{3}xy \right) = (0, 0) \quad (1.24)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4y - 4xy - \frac{4}{3}y^2 = 0 \\ 4x - 2x^2 - \frac{8}{3}xy = 0 \end{cases} \quad (1.25)$$

Or x et y sont positifs, ce qui implique que le système devient

$$\begin{cases} 4 - 4x - \frac{4}{3}y = 0 \\ 4 - 2x - \frac{8}{3}y = 0 \end{cases} \quad (1.26)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ y = 1 \end{cases} \quad (1.27)$$

Nous trouvons donc un unique point critique. Vérifions qu'il s'agit bien d'un maximum. La Hessienne de V est

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4y & 4 - 4x - \frac{8}{3}y \\ 4 - 4x - \frac{8}{3}y & -\frac{8}{3}x \end{pmatrix} \quad (1.28)$$

dont le déterminant δ est

$$\delta = \frac{32}{3}xy - \left(4 - 4x - \frac{8}{3}y \right)^2 \quad (1.29)$$

Au point critique, on vérifie

$$\delta \left(\frac{2}{3}, 1 \right) = \frac{48}{9} > 0 \quad (1.30)$$

ainsi que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \left(\frac{2}{3}, 1 \right) = -4 < 0 \quad (1.31)$$

Le Résultat XVI.17 affirme alors que le point critique $M = \left(\frac{2}{3}, 1 \right)$ est bel et bien un maximum local. On calcule alors que le volume correspondant vaut

$$V \left(\frac{2}{3}, 1 \right) = \frac{8}{9} \quad (1.32)$$

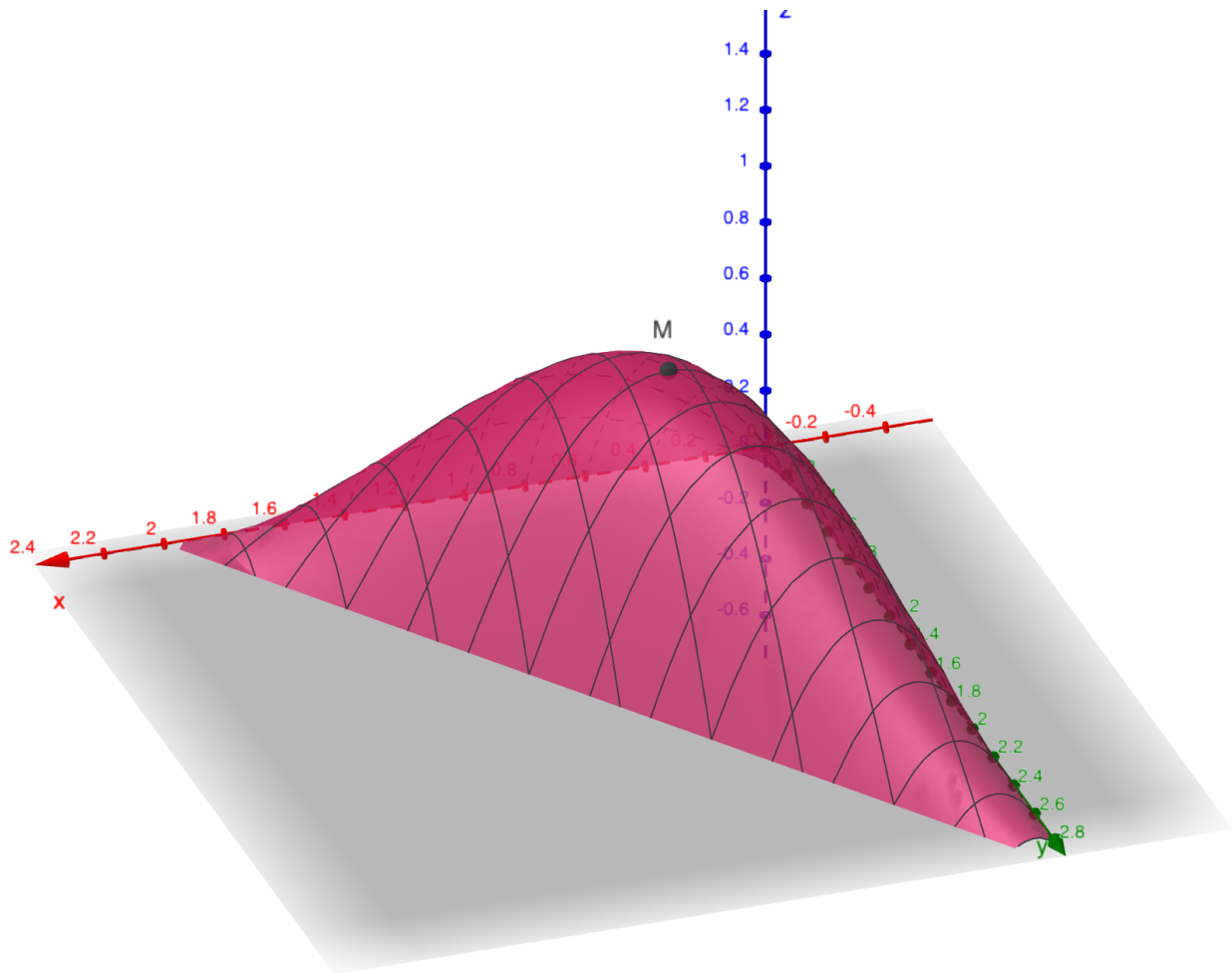


FIGURE 1.3 – Le point M est un maximum local de $V(x, y)$

Exercice 20.3 (a)

Déterminez les extrema locaux et globaux des fonctions suivantes :

a. $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \mapsto x^3 - y^3 + 3x^2 + 3y^2 - 9x$

Nous appliquons le Résultat XVI.17 du syllabus. Le gradient de f est

$$\nabla f(x, y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right) = (3x^2 + 6x - 9, -3y^2 + 6y) \quad (1.33)$$

On trouve facilement quatre points critiques : $(1, 0)$, $(1, 2)$, $(-3, 0)$ et $(-3, 2)$. La Hessienne de f est

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6x + 6 & 0 \\ 0 & -6y + 6 \end{pmatrix} \quad (1.34)$$

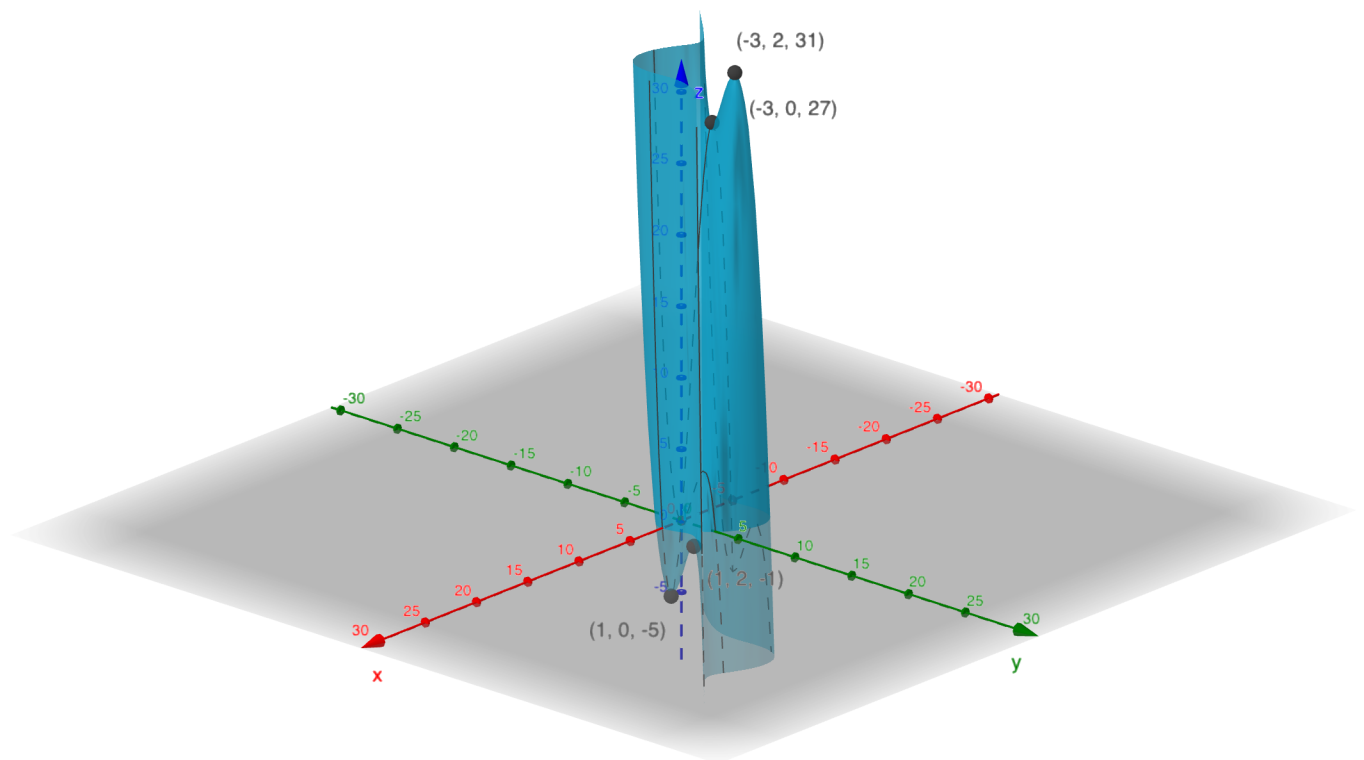
dont le déterminant est

$$\delta = 36(x + 1)(1 - y) \quad (1.35)$$

- En $(1, 0)$, on calcule $\delta(1, 0) > 0$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1, 0) > 0$. Il s'agit donc d'un minimum local strict.
- En $(1, 2)$, on calcule $\delta(1, 2) < 0$. Il ne s'agit donc pas d'un extremum local.
- En $(-3, 0)$, on calcule $\delta(-3, 0) < 0$. Il ne s'agit donc pas d'un extremum local.
- En $(-3, 2)$, on calcule $\delta(-3, 2) > 0$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-3, 2) < 0$. Il s'agit donc d'un maximum local strict.

La Figure 1.4 montre le graphique de la fonction f ainsi que ses points critiques. Comme la fonction n'est pas bornée les extremums que nous avons trouvés sont des extremums locaux, mais pas globaux. Il suffit donc de trouver un point en lequel la fonction est supérieure à $f(-3, 2)$ pour montrer que le maximum en $(-3, 2)$ n'est que local, et de manière analogue un point en lequel la fonction est inférieure à $f(1, 0)$ pour montrer que le minimum n'est que local, mais pas global :

- $f(1, 0) = 1 - 0 + 3 + 0 - 9 = -5$, mais $f(-10, 0) = -1000 - 0 + 300 + 0 + 90 = -610$, ce qui prouve que le minimum en $(1, 0)$ n'est pas global ;
- $f(-3, 2) = -27 - 8 + 27 + 12 + 27 = 31$, mais $f(10, 0) = 1000 - 0 + 300 - 90 = 1210$, ce qui prouve que le maximum en $(-3, 2)$ n'est pas global.

FIGURE 1.4 – La fonction f et ses points critiques

Exercice 19.1 (e)

Donner la valeur des intégrales suivantes.

e. $\iint_D (x+y) \, dx \, dy$ où $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 36\}$

Le domaine d'intégration est le disque fermé centré en $(0,0)$ et de rayon 6. A des fins pédagogiques, nous calculons cette intégrale de deux façons différentes : en intégrant directement tout d'abord, puis en utilisant les coordonnées polaires d'autre part.

On a

$$x^2 + y^2 \leq 36 \Leftrightarrow -\sqrt{36-y^2} \leq x \leq \sqrt{36-y^2} \quad (2.1)$$

avec

$$-6 \leq y \leq 6 \quad (2.2)$$

ce qui livre

$$\iint_D (x+y) \, dx \, dy = \int_{-6}^6 \int_{-\sqrt{36-y^2}}^{\sqrt{36-y^2}} (x+y) \, dx \, dy \quad (2.3)$$

$$= \int_{-6}^6 \left[\frac{x^2}{2} + xy \right]_{-\sqrt{36-y^2}}^{\sqrt{36-y^2}} dy \quad (2.4)$$

$$= \int_{-6}^6 2y\sqrt{36-y^2} \, dy \quad (2.5)$$

Posons $t := 36 - y^2$, ce qui livre $dt = -2y \, dy$. On calcule l'intégrale indéfinie

$$\int 2y\sqrt{36-y^2} \, dy = - \int \sqrt{t} \, dt = \frac{-2t\sqrt{t}}{3} + C = \frac{-2(36-y^2)\sqrt{36-y^2}}{3} + C \quad (2.6)$$

On conclut

$$\int_{-6}^6 2y\sqrt{36-y^2} \, dy = \left[\frac{-2(36-y^2)\sqrt{36-y^2}}{3} \right]_{-6}^6 = 0 \quad (2.7)$$

Alternativement, calculons l'intégrale $\iint_D (x+y) \, dx \, dy$ en ayant recours aux coordonnées polaires. Le domaine D est un disque, ce qui rend un tel changement de variables très à propos. Le changement de variables est donné par

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \end{cases} \quad (2.8)$$

dont la Jacobienne¹ est

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho \cos \theta & \frac{\partial}{\partial \theta} \rho \cos \theta \\ \frac{\partial}{\partial \rho} \rho \sin \theta & \frac{\partial}{\partial \theta} \rho \sin \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\rho \sin \theta \\ \sin \theta & \rho \cos \theta \end{pmatrix} \quad (2.9)$$

1. Voir Section XVI.4 du syllabus

Le Jacobien est le déterminant de la Jacobienne, soit

$$\det J = \begin{vmatrix} \cos \theta & -\rho \sin \theta \\ \sin \theta & \rho \cos \theta \end{vmatrix} = \rho \cos^2 \theta + \rho \sin^2 \theta = \rho \quad (2.10)$$

On peut reparamétriser D de la manière suivante :

$$D = \{(\rho, \theta) \in \mathbb{R}^+ \times [0, 2\pi[\mid \rho \leq 6\} \quad (2.11)$$

On voit que notre choix de coordonnées polaires permet d'exprimer D de façon très simple. On calcule² alors

$$\iint_D (x+y) \, dx \, dy = \int_0^{2\pi} \int_0^6 \rho (\cos \theta + \sin \theta) |\det J| \, d\rho \, d\theta \quad (2.12)$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^6 \rho^2 (\cos \theta + \sin \theta) \, d\rho \, d\theta \quad (2.13)$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[\frac{\rho^3}{3} (\cos \theta + \sin \theta) \right]_0^6 \, d\theta \quad (2.14)$$

$$= \frac{6^3}{3} \int_0^{2\pi} (\cos \theta + \sin \theta) \, d\theta \quad (2.15)$$

$$= \frac{6^3}{3} [\sin \theta - \cos \theta]_0^{2\pi} \quad (2.16)$$

$$= \frac{6^3}{3} (\sin 2\pi - \cos 2\pi - \sin 0 + \cos 0) \quad (2.17)$$

$$= 0 \quad (2.18)$$

Exercice 19.2 (b, d, f, h)

Calculer la valeur des intégrales suivantes.

b. $\iint_D x \sin y \, dx \, dy$ où $D = [0, 1] \times [0, \pi]$

d. $\iint_D y^2 \, dx \, dy$ où D est la couronne circulaire délimitée par les cercles de centre $(0,0)$ et de rayons 1 et 2.

f. $\iint_D y \, dx \, dy$ où $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y^2 \leq 1, |y| \leq 1\}$

h. $\iint_D \frac{1}{1+x^2+y^2} \, dx \, dy$ où D est la couronne circulaire délimitée par les cercles de centre $(0,0)$ et de rayons 1 et 2.

b. Nous intégrons immédiatement :

$$\iint_D x \sin y \, dx \, dy = \int_0^\pi \int_0^1 x \sin y \, dx \, dy \quad (2.19)$$

$$= \int_0^\pi \left[\frac{x^2}{2} \sin y \right]_0^1 \, dy \quad (2.20)$$

$$= \int_0^\pi \frac{\sin y}{2} \, dy \quad (2.21)$$

2. Attention à ne pas oublier la valeur absolue du Jacobien ! Dans notre cas, $\rho \geq 0$, donc $|\rho| = \rho$.

$$= \left[-\frac{\cos y}{2} \right]_0^\pi \quad (2.22)$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \quad (2.23)$$

$$= 1 \quad (2.24)$$

d. Le domaine semble propice à un changement en coordonnées polaires.

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \end{cases}, \quad \det J = \rho \quad (2.25)$$

ce qui permet de paramétrer le domaine d'intégration de la manière suivante :

$$D = \{(\rho, \theta) \in \mathbb{R}^+ \times [0, 2\pi[\mid 1 \leq \rho \leq 2\}$$

L'intégrale devient

$$\iint_D y^2; dx dy = \int_0^{2\pi} \int_1^2 \rho^2 \sin^2(\theta) d\rho d\theta \quad (2.27)$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[\frac{\rho^3}{3} \right]_1^2 \sin^2(\theta) d\theta \quad (2.28)$$

$$= \frac{7}{3} \int_0^{2\pi} \sin^2(\theta) d\theta \quad (2.29)$$

$$= \frac{7}{3} \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos(2\theta)}{2} d\theta \quad (2.30)$$

$$= \frac{7}{3} \left[\frac{\theta}{2} - \frac{\sin(2\theta)}{4} \right]_0^{2\pi} \quad (2.31)$$

$$= \frac{7}{3} \pi \quad (2.32)$$

f. Nous intégrons immédiatement :

$$\iint_D y dx dy = \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1+y^2}}^{\sqrt{1+y^2}} y dx dy \quad (2.33)$$

$$= \int_{-1}^1 [xy]_{-\sqrt{1+y^2}}^{\sqrt{1+y^2}} dy \quad (2.34)$$

$$= \int_{-1}^1 2y\sqrt{1+y^2} dy \quad (2.35)$$

$$= \frac{2}{3} \left[(1+y^2)^{\frac{3}{2}} \right]_{-1}^1 \quad (2.36)$$

$$= 0 \quad (2.37)$$

h. Le domaine semble propice à un changement en coordonnées polaires.

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \end{cases}, \quad \det J = \rho \quad (2.38)$$

ce qui permet de paramétrer le domaine d'intégration de la manière suivante :

$$D = \{(\rho, \theta) \in \mathbb{R}^+ \times [0, 2\pi[\mid 1 \leq \rho \leq 2\}$$

L'intégrale devient

$$\iint_D \frac{1}{1+x^2+y^2} dx dy = \int_0^{2\pi} \int_1^2 \frac{\rho}{1+\rho^2 \cos^2 \theta + \rho^2 \sin^2 \theta} d\rho d\theta \quad (2.40)$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_1^2 \frac{\rho}{1+\rho^2} d\rho d\theta \quad (2.41)$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{2} \ln|1+\rho^2| \right]_1^2 d\theta \quad (2.42)$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (\ln 5 - \ln 2) d\theta \quad (2.43)$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \ln \frac{5}{2} d\theta \quad (2.44)$$

$$= \frac{\ln \frac{5}{2}}{2} \int_0^{2\pi} d\theta \quad (2.45)$$

$$= \pi \ln \frac{5}{2} \quad (2.46)$$

Exercice 19.5

Calculer, à l'aide d'une intégrale double, l'aire de la région bornée de $\mathbb{R}^2$

- a. délimitée par les paraboles d'équations respectives $y^2 = 10x + 25$ et $y^2 = -6x + 9$
- c. ne contenant pas l'origine et délimitée par les courbes d'équations $x^2 + y^2 = 4$ et $x = 1$ respectivement

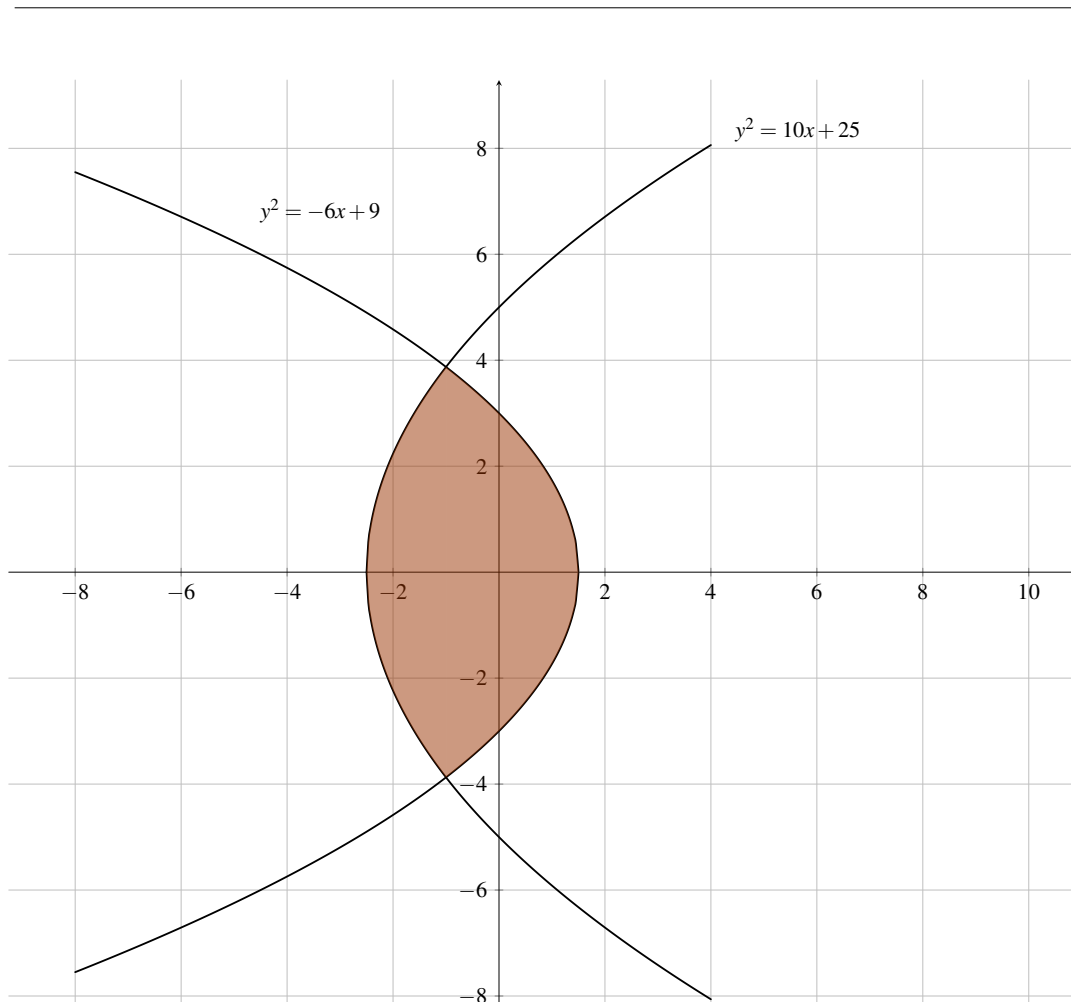


FIGURE 2.1 – La surface dont on veut calculer l'aire.

Les deux courbes s'intersectent en $x = -1$. L'aire cherchée est égale au volume de la fonction constante $(x, y) \mapsto 1$ sur le domaine D :

$$\iint_D 1 \, dy \, dx = \int_{-\frac{5}{2}}^{-1} \int_{-\sqrt{10x+25}}^{\sqrt{10x+25}} 1 \, dy \, dx + \int_{-1}^{\frac{3}{2}} \int_{-\sqrt{-6x+9}}^{\sqrt{-6x+9}} 1 \, dy \, dx \quad (2.47)$$

$$= \int_{-\frac{5}{2}}^{-1} 2\sqrt{10x+25} \, dx + \int_{-1}^{\frac{3}{2}} 2\sqrt{-6x+9} \, dx \quad (2.48)$$

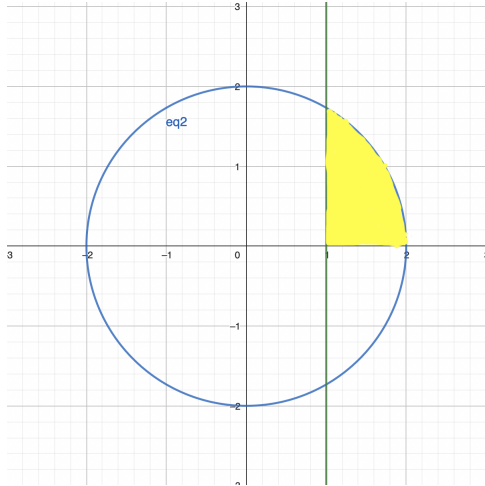
$$= \left[\frac{2}{15} (10x+25)^{\frac{3}{2}} \right]_{-\frac{5}{2}}^{-1} + \left[\frac{2}{-9} (-6x+9)^{\frac{3}{2}} \right]_{-1}^{\frac{3}{2}} \quad (2.49)$$

$$= \frac{2}{15} 15^{\frac{3}{2}} + \frac{-2}{9} (-15^{\frac{3}{2}}) \quad (2.50)$$

$$= 2\sqrt{15} + \frac{10}{3}\sqrt{15} \quad (2.51)$$

$$= \frac{16}{3}\sqrt{15} \quad (2.52)$$

L'aire dont il est question est l'aire de droite sur le schéma ci-dessous :



L'aire cherchée est égale à deux fois le volume de la fonction constante $(x,y) \mapsto 1$ sur le domaine D égal à la partie supérieure de l'aire sur le schéma ci-dessus :

$$\begin{aligned} \iint_D 1 \, dy \, dx &= \int_1^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} 1 \, dy \, dx \\ &= \int_1^2 \sqrt{4-x^2} \, dx \\ &= \int_{\sin^{-1}(1/2)}^{\sin^{-1}(1)} \sqrt{4-4\sin^2(u)} 2\cos(u) \, du \end{aligned}$$

où nous avons effectué le changement de variables suivant : $x = 2\sin(u)$, $dx = 2\cos(u)du$

$$\begin{aligned} &= \int_{\sin^{-1}(1/2)}^{\sin^{-1}(1)} 4\cos^2(u) \, du \\ &= 4 \left[\frac{u}{2} + \frac{\sin(2u)}{4} \right]_{\sin^{-1}(1/2)}^{\sin^{-1}(1)} \\ &= 4 \left(\frac{\sin^{-1}(1)}{2} + \frac{\sin(2\sin^{-1}(1))}{4} - \frac{\sin^{-1}(1/2)}{2} - \frac{\sin(2\sin^{-1}(1/2))}{4} \right) \\ &= 4 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\sin(\pi)}{4} - \frac{\pi}{12} - \frac{\sin(\pi/3)}{4} \right) \\ &= 4 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{12} - \frac{\sqrt{3}}{8} \right) \\ &= 4 \left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{8} \right) \\ &= \frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

Exercice 19.6

Calculer par intégrale double le volume de la région bornée de $\mathbb{R}^3$ délimitée par les deux cylindres d'équations respectives $x^2 + y^2 = 1$ et $x^2 + z^2 = 1$.

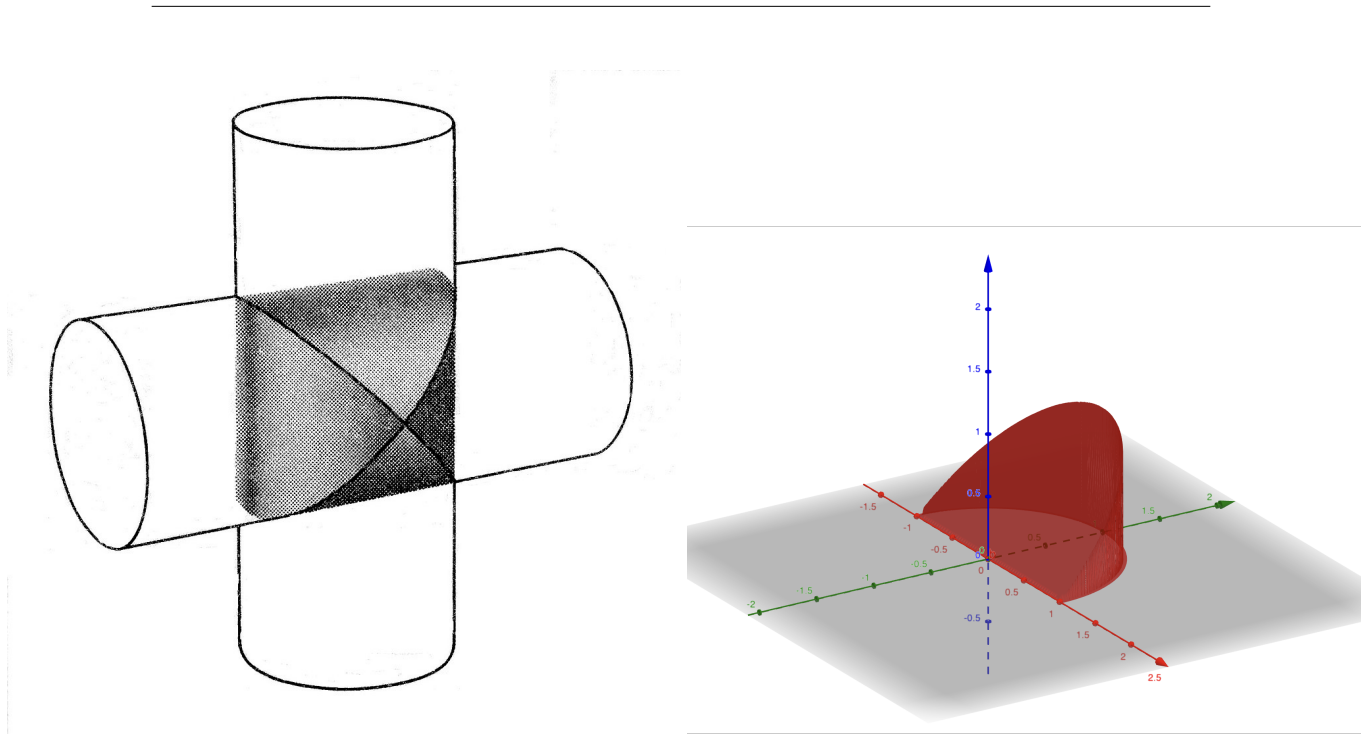


FIGURE 2.2 – L'intersection de deux cylindres

Il existe de nombreuses manières de calculer le volume de l'intersection de deux cylindres perpendiculaires de même rayon. La stratégie que nous proposons ici est d'utiliser la symétrie de cette intersection, représentée dans la Figure 2.2 : le volume à gauche peut être décomposé en huit morceaux isométriques représentés à droite. Un tel morceau correspond à l'intégrale d'un plan sur un demi-disque. Le demi-disque représenté est

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0\} \quad (2.53)$$

et le plan en question est le plan $y = z$. Pour le déterminer, on peut par exemple raisonner comme suit : on connaît facilement trois points de ce plan, par exemple $(-1, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$ et $(0, 1, 1)$. On remplace alors dans l'équation générale cartésienne d'un plan ces coordonnées. Le volume de ce morceau est donc

$$\iint_D y \, dx \, dy \quad (2.54)$$

et le volume total est

$$8 \iint_D y \, dx \, dy \quad (2.55)$$

Calculons cette intégrale en ayant recours aux coordonnées polaires.

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \end{cases}, \quad \det J = \rho \quad (2.56)$$

où $\theta \in [0, \pi]$ et $\rho \in [0, 1]$. On a donc

$$8 \iint_D y \, dx \, dy = 8 \int_0^\pi \int_0^1 \rho^2 \sin \theta \, d\rho \, d\theta \quad (2.57)$$

$$= 8 \int_0^\pi \left[\frac{\rho^3}{3} \sin \theta \right]_0^1 d\theta \quad (2.58)$$

$$= \frac{8}{3} \int_0^\pi \sin \theta d\theta \quad (2.59)$$

$$= \frac{8}{3} [\cos \theta]_0^\pi \quad (2.60)$$

$$= \frac{16}{3} \quad (2.61)$$

Exercice 19.8 (b)

Calculer, par réduction à des intégrales simples,

1. $\iiint_D y \, dx \, dy \, dz$ où D est la région bornée du premier octant de $\mathbb{R}^3$ limité par le plan d'équation $x + 2y + 3z = 1$.

Comme d'habitude, nous commençons par paramétriser le domaine d'intégration D . Il s'agit de la région de l'espace comprise entre $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$ et $x + 2y + 3z \leq 1$. Cette dernière équation est équivalente à $x + 2y \leq 1 - 3z$, et donc $z \in [0, \frac{1}{3}]$. On a donc

$$\iiint_D y \, dx \, dy \, dz = \int_0^{\frac{1}{3}} \int_0^{\frac{1-3z}{2}} \int_0^{1-3z-2y} y \, dx \, dy \, dz \quad (2.62)$$

$$= \int_0^{\frac{1}{3}} \int_0^{\frac{1-3z}{2}} [xy]_0^{1-3z-2y} dy \, dz \quad (2.63)$$

$$= \int_0^{\frac{1}{3}} \int_0^{\frac{1-3z}{2}} y(1-3z-2y) dy \, dz \quad (2.64)$$

$$= \int_0^{\frac{1}{3}} \left[\frac{y^2}{2} - \frac{3y^2z}{2} - \frac{2y^3}{3} \right]_0^{\frac{1-3z}{2}} dz \quad (2.65)$$

$$= \int_0^{\frac{1}{3}} \frac{\left(\frac{1-3z}{2}\right)^2}{2} - \frac{3\left(\frac{1-3z}{2}\right)^2 z}{2} - \frac{2\left(\frac{1-3z}{2}\right)^3}{3} dz \quad (2.66)$$

$$= \int_0^{\frac{1}{3}} \left(\frac{1-3z}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{3z}{2} - \frac{(1-3z)}{3}\right) dz \quad (2.67)$$

$$= \int_0^{\frac{1}{3}} \left(\frac{1-3z}{2}\right)^2 \left(\frac{3}{6} - \frac{9z}{6} - \frac{2-6z}{6}\right) dz \quad (2.68)$$

$$= \int_0^{\frac{1}{3}} \frac{(1-3z)^2}{4} \left(\frac{1-3z}{6}\right) dz \quad (2.69)$$

$$= \frac{1}{24} \int_0^{\frac{1}{3}} (1-3z)^3 dz \quad (2.70)$$

$$= \frac{1}{288} \quad (2.71)$$