

MATH-F112
Correction du TP15
Nombres complexes

Nombres complexes

Exercice 21.1

(b) On distribue puis on utilise $i^2 = -1$:

$$(2 - 3i)(3 - 2i) = 6 - 9i - 4i + 6i^2 = -13i.$$

(e) On utilise $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$, puis $i^2 = -1$:

$$(1 - i)^3 = 1 - 3i + 3i^2 - i^3 = -2 - 2i.$$

(g) On élimine la partie réelle du dénominateur en multipliant celui-ci avec son conjugué :

$$\frac{2+i}{4-3i} = \frac{2+i}{4-3i} \cdot \frac{4+3i}{4+3i} = \frac{8+6i+4i+3i^2}{4^2-(3i)^2} = \frac{5+10i}{25} = \frac{1}{5} + \frac{2}{5}i$$

Exercice 21.3

Pour résoudre les équations du second degré $\mu x^2 + \lambda x + \delta = 0$ dans $\mathbb{C}$, on calcule le discriminant Δ , puis on en extrait les racines carrées complexes ω tel que $\omega^2 = \Delta$, l'équation admet pour solutions les nombres complexes $\frac{-\lambda \pm \omega}{2}$

(d)

$$x^2 + x + 3\sqrt{2}i = 0$$

On calcule $\Delta = 1 - 12\sqrt{2}i$. Les racines carrées de Δ sont des nombres complexes $a + bi$ tels que $(a + bi)^2 = \Delta$. On obtient donc les équations

$$\begin{cases} a^2 - b^2 &= 1 \\ 2ab &= -12\sqrt{2} \\ a^2 + b^2 &= |\Delta| = 17 \end{cases} \quad (1)$$

où la dernière équation est obtenue en observant que le module de Δ vaut le carré du module de $a + bi$. En additionnant la première équation à la dernière, on a $2a^2 = 18$ et donc $a = \pm 3$. En soustrayant maintenant la première équation à la troisième, on a $2b^2 = 16$ et donc $b = \pm 2\sqrt{2}$. Pour le signe relatif de a et b , on regarde la deuxième équation et on obtient : $a = 3$ et $b = -2\sqrt{2}$, ou $a = -3$ et $b = 2\sqrt{2}$. Ce qui donne $\omega = \pm(3 - 2\sqrt{2}i)$.

Alors les solutions sont $x = \frac{-1 \pm (3 - 2\sqrt{2}i)}{2}$, donc $x = 1 - \sqrt{2}i$ ou $x = -2 + \sqrt{2}i$.

(h)

$$x^2 - (2 + 3i)x + 6i = 0$$

On calcule $\Delta = -5 - 12i$. Les racines carrées de Δ sont des nombres complexes $a + bi$ tels que $(a + bi)^2 = \Delta$. On obtient donc les équations

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = -5 \\ 2ab = -12 \\ a^2 + b^2 = |\Delta| = 13 \end{cases} \quad (2)$$

où la dernière équation est obtenue en observant que le module de Δ vaut le carré du module de $a + bi$. En additionnant la première équation à la dernière, on a $2a^2 = 8$ et donc $a = \pm 2$. En soustrayant maintenant la première équation à la troisième, on a $2b^2 = 18$ et donc $b = \pm 3$. Pour le signe relatif de a et b , on regarde la deuxième équation et on obtient : $a = 2$ et $b = -3$, ou $a = -2$ et $b = 3$. Ce qui donne $\omega = \pm(2 - 3i)$.

Alors les solutions sont $x = \frac{2+3i \pm (2-3i)}{2}$, donc $x = 2$ ou $x = 3i$.

Exercice 21.4

$$z^3 - (1 + 8i)z^2 - (15 - 8i)z + 15 = 0$$

(a) On constate que $z = 1$ est une solution, car

$$1 - (1 + 8i).1 - (15 - 8i).1 + 15 = 0.$$

(b) On divise $z^3 - (1 + 8i)z^2 - (15 - 8i)z + 15$ par $z - 1$, on obtient

$$z^3 - (1 + 8i)z^2 - (15 - 8i)z + 15 = (z - 1)(z^2 - 8iz - 15).$$

Il reste alors à trouver les solutions de

$$z^2 - 8iz - 15 = 0.$$

On procède comme dans l'exercice précédent, on calcule $\Delta = -4$. Les racines carrées de Δ sont les nombres complexes $\omega = \pm 2i$.

Alors les solutions sont $z = \frac{8i \pm 2i}{2}$, donc $z = 3i$ ou $z = 5i$.

Donc, $S = \{1, 3i, 5i\}$.

Exercice 21.5

$$2) \text{ D'une part } -2 - 2i\sqrt{3} = 4 \cdot \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 4 \cdot \left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right)$$

$$\text{D'autre part } -1 + i\sqrt{3} = 2 \cdot \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 2 \cdot \left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right).$$

Ainsi,

$$\frac{-2 - 2i\sqrt{3}}{-1 + i\sqrt{3}} = \frac{4 \cdot (\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3})}{2 \cdot (\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3})} = 2 \cdot \left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right) = 2 \cdot \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right).$$

7) Tout d'abord nous allons réécrire le nombre complexe sous forme polaire

$$1 + i\sqrt{3} = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right).$$

Ensuite calculons avec la formule de De Moivre les 4^{èmes} racines de ce nombre complexe :

$$1 + i\sqrt{3} = \sqrt[4]{2} \left(\cos \frac{\frac{\pi}{3} + 2k\pi}{4} + i \sin \frac{\frac{\pi}{3} + 2k\pi}{4} \right) \quad \text{pour } k \in \{0, 1, 2, 3\}.$$

Ce qui nous donne les 4 racines suivantes :

$$\begin{aligned} & \sqrt[4]{2} \left(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12} \right), \sqrt[4]{2} \left(\cos \frac{7\pi}{12} + i \sin \frac{7\pi}{12} \right), \\ & \sqrt[4]{2} \left(\cos \frac{13\pi}{12} + i \sin \frac{13\pi}{12} \right), \sqrt[4]{2} \left(\cos \frac{19\pi}{12} + i \sin \frac{19\pi}{12} \right) \end{aligned}$$

Exercice 21.6

1) Écrivons l'équation $|z - 2|^2 \leq 1$ pour $z = a + bi$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. On obtient

$$(a - 2)^2 + b^2 \leq 1,$$

ce qui représente bien l'équation d'un cercle dans le plan de Gauss centré en $(2, 0)$ de rayon 1.

2) Écrivons l'équation $|z - i|^2 \leq 4$ pour $z = a + bi$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. On obtient

$$a^2 + (b - 1)^2 \leq 4,$$

ce qui représente bien l'équation d'un cercle dans le plan de Gauss centré en $(0, 1)$ de rayon 2.

Exercice 21.9

Cherchons les solutions de l'équation $z(z - 2)^3 = 8z$, ce qui revient à trouver les racines du polynôme

$$P(z) = z(z - 2)^3 - 8z.$$

D'abord, $z = 0$ est une racine. En divisant le polynôme $z(z - 2)^3 - 8z$ par le polynôme z , on obtient le polynôme $(z - 2)^3 - 8 = (z - 2 - 2)((z - 2)^2 + 2(z - 2) + 4)$ où on a utilisé $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$. On voit donc que 4 est une racine de $P(z)$. Il reste à trouver les racines de $(z - 2)^2 + 2(z - 2) + 4$ qui se réécrit comme $z^2 - 2z + 4$. On procède alors comme à l'exercice 21.3. On trouve $\Delta = -12$ qui a pour racine les nombres complexes $\pm 2\sqrt{3}i$. Alors, les deux racines restantes de $P(z)$ sont $\frac{2+2\sqrt{3}i}{2} = 1 + \sqrt{3}i$ et $\frac{2-2\sqrt{3}i}{2} = 1 - \sqrt{3}i$.

L'ensemble des racines est donc $S = \{0, 4, 1 + \sqrt{3}i, 1 - \sqrt{3}i\}$. On vérifie que ces solutions satisfont toutes $|z - 2| \leq 2$ et sont donc dans le plan de Gauss toutes sur le cercle centré en $(2, 0)$ et de centre 2.

Remarque : Trouver les racines du polynôme $(z - 2)^3 - 8$ revient à trouver les nombres $z - 2$ qui sont des racines cubiques de 8 que l'on trouve en utilisant la forme polaire comme vu au TP ex cat.