

MATH-F112
Correction du TP16
Équations différentielles

Équations différentielles

Exercice 18.6

On demande de déterminer les régions du plan où le graphe des solutions de l'équation

$$y' = \sin(x^2 + y^2)$$

ont une pente strictement positive.

La pente de y est strictement positive en x ssi $y'(x) > 0$, ce qui se réécrit au vu de l'équation par $\sin(x^2 + y^2) > 0$. En tenant compte du fait que $x^2 + y^2 \geq 0$, on voit que la pente est strictement positive pour les (x, y) tels que :

$$x^2 + y^2 \in]0 + 2k\pi, \pi + 2k\pi[\text{ pour } k \in \mathbb{N}.$$

Comme région du plan, il s'agit d'une réunion d'anneaux ouverts concentriques centrés en 0.

Exercice 18.9 a

On résout l'équation

$$y' \sqrt{1 - x^2} + xy = 0.$$

L'équation est à variables séparées. Nous postposerons toutes les questions de domaine, conditions d'existence, qui apparaissent dans l'équation ou dans sa résolution, à la fin de l'exercice.

On sépare donc les variables :

$$\begin{aligned} y' &= -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}y, \\ \frac{dy}{y} &= -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx. \end{aligned}$$

En intégrant chacun des deux membres, on obtient

$$\ln(|y|) = \sqrt{1-x^2} + C, \text{ avec } C \in \mathbb{R}.$$

On prend l'exponentielle des deux membres

$$|y| = e^C \cdot e^{\sqrt{1-x^2}}.$$

On fait sauter la valeur absolue :

$$y = \pm e^C \cdot e^{\sqrt{1-x^2}},$$

avec C un nombre réel quelconque.

Au cours du procédé de séparation des variables, nous avons divisé par y , ce qui ne peut se faire que si y est non nul. En particulier, cela nous a fait loupé la solution $y \equiv 0$. Ainsi, on peut écrire la solution générale :

$$y = A.e^{\sqrt{1-x^2}}, \text{ pour } A \in \mathbb{R}.$$

Le domaine des solutions non nulles est $[-1, 1]$ comme pour le coefficient devant y' .

Exercice 18.18

b) On résout l'équation

$$(x-2)y' = y + 2(x-2)^3.$$

Nous postposerons toutes les questions de domaine, conditions d'existence, qui apparaîtraient dans l'équation ou dans sa résolution, au moment où nous obtiendrons les solutions de l'ELHA.

Première étape, on résout l'ELHA

$$(x-2)y' - y = 0.$$

L'équation est à variables séparées.

On sépare donc les variables :

$$\begin{aligned} (x-2)y' &= y, \\ \frac{dy}{y} &= \frac{dx}{x-2}. \end{aligned}$$

En intégrant chacun des deux membres, on obtient

$$\ln(|y|) = \ln|x-2| + C, \text{ avec } C \in \mathbb{R}.$$

On prend l'exponentielle des deux membres

$$|y| = e^C \cdot |x-2|.$$

On fait sauter la valeur absolue :

$$y = \pm e^C \cdot (x-2),$$

avec C un nombre réel quelconque.

Au cours du procédé de séparation des variables, nous avons divisé par y , ce qui ne peut se faire que si y est non nul. En particulier, cela nous a fait loupé la solution $y \equiv 0$. Ainsi, on peut écrire la solution générale de l'ELHA :

$$y_{ELHA} = A \cdot (x-2), \text{ avec } A \in \mathbb{R}.$$

Ensuite, on cherche une solution particulière à l'équation

$$(x-2)y' = y + 2(x-2)^3. \quad (1)$$

Une telle solution s'obtient en utilisant la méthode de variation des constantes. C'est-à-dire, on utilise la forme de la solution y_{ELHA} en introduisant une dépendance en x dans la constante A . En d'autres mots, on cherche une solution de la forme

$$y_P = A(x)(x-2), \text{ avec } A(x) \text{ une fonction inconnue.}$$

En injectant ce candidat solution dans l'équation (1), on trouve $A(x) = (x-2)^2$ et donc

$$y_P = (x-2)^3.$$

La solution générale est la somme de la solution particulière avec les solutions de l'ELHA :

$$y = (x-2)^3 + A \cdot (x-2), \text{ avec } A \in \mathbb{R}.$$

c) On résoud l'équation

$$y' + y \cotg(x) = 5e^{\cos(x)},$$

avec condition initiale $y(\pi/2) = -4$. Nous postposerons toutes les questions de domaine, conditions d'existence, qui apparaîtraient dans l'équation ou dans sa résolution, au moment où nous obtiendrons les solutions de l'ELHA et les solutions générales.

Première étape, on résoud l'ELHA

$$y' + y \cotg(x) = 0.$$

L'équation est à variables séparées.

On sépare donc les variables :

$$\begin{aligned} y' &= -\cotg(x)y, \\ \frac{dy}{y} &= -\cotg(x)dx. \end{aligned}$$

En intégrant chacun des deux membres, on obtient

$$\ln(|y|) = -\ln|\sin(x)| + C, \text{ avec } C \in \mathbb{R}.$$

On prend l'exponentielle des deux membres

$$|y| = e^C \cdot \frac{1}{|\sin(x)|}.$$

On fait sauter la valeur absolue :

$$y = \pm e^C \cdot \frac{1}{\sin(x)},$$

avec C un nombre réel quelconque.

Au cours du procédé de séparation des variables, nous avons divisé par y , ce qui ne peut se faire que si y est non nul. En particulier, cela nous a fait loupé la solution $y \equiv 0$. Ainsi, on peut écrire la solution générale de l'ELHA :

$$y_{ELHA} = A \cdot \frac{1}{\sin(x)}, \text{ avec } A \in \mathbb{R}.$$

Le domaine des solutions non nulles ci-dessus est, comme pour la fonction cotangente, une réunion d'intervalles ouverts 2 à 2 disjoints $]k\pi, (k+1)\pi[$ avec $k \in \mathbb{Z}$. Pour avoir la solution la plus générale possible de l'ELHA, il faut pouvoir choisir une constante A sur chaque intervalle ouvert (qui sont les composantes connexes du domaine).

Ensuite, on cherche une solution particulière à l'équation

$$y' + y \cotg(x) = 5e^{\cos(x)}. \quad (2)$$

Une telle solution s'obtient en utilisant la méthode de variation des constantes. C'est-à-dire, on utilise la forme de la solution y_{ELHA} en introduisant une dépendance en x dans la constante A . En d'autres mots, on cherche une solution de la forme

$$y_P = A(x) \cdot \frac{1}{\sin(x)}, \text{ avec } A(x) \text{ une fonction inconnue.}$$

En injectant ce candidat solution dans l'équation (2), on trouve $A(x) = -5e^{\cos(x)}$ et donc

$$y_P = -5 \frac{e^{\cos(x)}}{\sin(x)}.$$

La solution générale est la somme de la solution particulière avec les solutions de l'ELHA :

$$y = -5 \frac{e^{\cos(x)}}{\sin(x)} + A \cdot \frac{1}{\sin(x)}, \text{ avec } A \in \mathbb{R}.$$

Enfin la constante, sur l'intervalle ouvert $]0, \pi[$ (voir les remarques faites sur le domaine lors de la résolution de l'ELHA), est déterminée par la condition initiale. En effet, $y(\pi/2) = -4$ signifie que $-5 + A = -4$ et donc, $A = 1$. La solution du problème est donc, sur l'intervalle $]0, \pi[$:

$$y = -5 \frac{e^{\cos(x)}}{\sin(x)} + \frac{1}{\sin(x)}$$

e) On résout l'équation

$$\frac{dr}{d\theta} + 3r = 2,$$

avec r fonction de θ . Nous postposerons toutes les questions de domaine, conditions d'existence, qui apparaîtraient dans la résolution, au moment où nous obtiendrons les solutions.

L'équation est à variables séparées. Donc, on sépare donc les variables :

$$\begin{aligned} \frac{dr}{d\theta} &= 2 - 3r, \\ \frac{dr}{2 - 3r} &= d\theta \end{aligned}$$

En intégrant chacun des deux membres, on obtient

$$-\frac{1}{3} \ln(|2 - 3r|) = \theta + C, \text{ avec } C \in \mathbb{R}.$$

On prend l'exponentielle des deux membres

$$|2 - 3r| = e^C \cdot e^{-3\theta}.$$

On fait sauter la valeur absolue :

$$2 - 3r = \pm e^C \cdot e^{-3\theta}.$$

Et donc,

$$r = \frac{2}{3} + Ae^{-3\theta}$$

avec $A \in \mathbb{R}_0$.

Au cours du procédé de séparation des variables, nous avons divisé par $2 - 3r$, ce qui ne peut se faire que si $2 - 3r$ est non nul. En particulier, cela nous a fait loupé la solution constante $r \equiv \frac{2}{3}$. Ainsi, on peut écrire la solution générale :

$$r = \frac{2}{3} + Ae^{-3\theta}, \text{ avec } A \in \mathbb{R}.$$

Exercice 18.19

Considérons l'équation différentielle

$$(x^2 + 2x + 5)y' - (x + 1)y = x + 1$$

1. Déterminer la solution générale de cette équation différentielle.

Commençons par séparer les variables :

$$\begin{aligned}(x^2 + 2x + 5)y' - (x + 1)y &= x + 1 \\ \Leftrightarrow (x^2 + 2x + 5)y' &= (x + 1)(y + 1) \\ \Leftrightarrow (x^2 + 2x + 5)\frac{dy}{dx} &= (x + 1)(y + 1)\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \frac{dy}{y + 1} = \frac{(x + 1)dx}{x^2 + 2x + 5}$$

Notons que $x^2 + 2x + 5$ n'a pas de racines réelles et comme le coefficient de x^2 est positif, l'équation est strictement positive $\forall x \in \mathbb{R}$. En observant la ligne 3, nous obtenons par conséquent que $y + 1 \neq 0$.

En intégrant on obtient

$$\ln |y + 1| = \frac{1}{2} \ln |x^2 + 2x + 5| + C \quad (C \in \mathbb{R})$$

Donc

$$|y + 1| = e^C \sqrt{|x^2 + 2x + 5|}$$

On obtient

$$y = \pm e^C \sqrt{|x^2 + 2x + 5|} - 1 = C' \sqrt{|x^2 + 2x + 5|} - 1 \quad (C' \in \mathbb{R})$$

2. Combien de solutions particulières passent par le point $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$? Déterminer toutes ces solutions particulières.

$$\text{Si } \frac{3}{2} = y\left(\frac{1}{2}\right) = C' \sqrt{\left|\frac{1}{4} + 1 + 5\right|} - 1 \quad \text{alors} \quad C' = \frac{\frac{3}{2} + 1}{\sqrt{\frac{25}{4}}} = \frac{2}{5} \cdot \frac{5}{2} = 1$$

La seule solution particulière qui passe par $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$ est

$$y(x) = \sqrt{|x^2 + 2x + 5|} - 1$$

Exercice 18.26

On considère l'équation

$$\frac{dy}{dx} + yf(x) = \sin(x).$$

- a) On veut que $y = \cos(x)$ soit solution. On l'injecte dans l'équation ci-dessus et on obtient

$$-\sin(x) + \cos(x)f(x) = \sin(x).$$

Ainsi, on voit qu'il faut que $f(x) = 2 \tan(x)$.

b) On résoud l'équation

$$y' + y \tan(x) = \sin(x),$$

Nous postposerons toutes les questions de domaine, conditions d'existence, qui apparaîtraient dans l'équation ou dans sa résolution, au moment où nous obtiendrons les solutions de l'ELHA et les solutions générales.

Première étape, on résoud l'ELHA

$$y' + 2y \tan(x) = 0.$$

L'équation est à variables séparées. On sépare donc les variables :

$$\begin{aligned} y' &= -2 \tan(x)y, \\ \frac{dy}{y} &= -2 \tan(x) dx. \end{aligned}$$

En intégrant chacun des deux membres, on obtient

$$\ln(|y|) = 2 \ln |\cos(x)| + C, \text{ avec } C \in \mathbb{R}.$$

On prend l'exponentielle des deux membres

$$|y| = e^C \cdot \cos^2(x).$$

On fait sauter la valeur absolue :

$$y = \pm e^C \cdot \cos^2(x),$$

avec C un nombre réel quelconque.

Au cours du procédé de séparation des variables, nous avons divisé par y , ce qui ne peut se faire que si y est non nul. En particulier, cela nous a fait loupé la solution $y \equiv 0$. Ainsi, on peut écrire la solution générale de l'ELHA :

$$y_{ELHA} = A \cdot \cos^2(x), \text{ avec } A \in \mathbb{R}.$$

Le domaine des solutions est $\mathbb{R}$. Or, celui du coefficient $\tan(x)$ de l'équation différentielle une réunion d'intervalles ouverts 2 à 2 disjoints $]\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + (k+1)\pi[$ pour $k \in \mathbb{Z}$. Ainsi, toute fonction y qui restreinte à un intervalle $]\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + (k+1)\pi[$ est de la forme de y_{ELHA} est solution, le choix de la constante A pouvant différer d'un intervalle à l'autre.

Comme on a déjà la solution particulière $y = \cos(x)$, la solution générale est la somme de la solution particulière avec les solutions de l'ELHA :

$$y(x) = \cos(x) + A \cdot \cos^2(x), \text{ avec } A \in \mathbb{R}.$$

c) Comme il faut un extrémum de $x = \frac{\pi}{4}$, alors $y'(\frac{\pi}{4}) = 0$. En calculant y' au point $x = \frac{\pi}{4}$ on obtient :

$$-\sin(\frac{\pi}{4}) - 2A \sin(\frac{\pi}{4}) \cos(\frac{\pi}{4}) = 0.$$

On obtient donc $A = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ et la solution cherchée est :

$$y = \cos(x) - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \cos^2(x).$$

Notez que la constante n'est fixée que sur l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

Exercice 18.39

f) On résoud l'équation linéaire à coefficients constants

$$y'' - 5y' + 6y = e^{-x}.$$

Première étape, on résoud l'ELHA

$$y'' - 5y' + 6y = 0.$$

L'équation caractéristique associée est

$$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0,$$

ses solutions sont $\lambda = 3$ ou $\lambda = 2$. Ainsi,

$$y_{ELHA} = A.e^{3x} + B.e^{2x}, \text{ avec } A, B \in \mathbb{R}.$$

Ensuite, on cherche une solution particulière à l'équation

$$y'' - 5y' + 6y = e^{-x}. \quad (3)$$

Vu la forme du membre de droite et le fait que les dérivées successives de e^{-x} reste des multiples de e^{-x} , on essaie de trouver une solution particulière de la forme $y = Ke^{-x}$. En injectant ce candidat dans l'équation (3), on trouve $K = \frac{1}{12}$. Ainsi,

$$y_P = \frac{1}{12}e^{-x}.$$

La solution générale est la somme de la solution particulière avec les solutions de l'ELHA :

$$y = \frac{1}{12}e^{-x} + A.e^{3x} + B.e^{2x}, \text{ avec } A, B \in \mathbb{R}.$$

r) On résoud l'équation linéaire à coefficients constants

$$y'' + 2y' + 2y = x^2 + \sin(x).$$

Première étape, on résoud l'ELHA

$$y'' + 2y' + 2y = 0.$$

L'équation caractéristique associée est

$$\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0,$$

ses solutions sont $\lambda = -1 + i$ ou $\lambda = -1 - i$. Ainsi,

$$y_{ELHA} = A.\cos(x)e^{-x} + B.\sin(x)e^{-x}, \text{ avec } A, B \in \mathbb{R}.$$

Ensuite, on cherche une solution particulière à l'équation

$$y'' + 2y' + 2y = x^2 + \sin(x). \quad (4)$$

Vu que le membre de droite, on va chercher d'une part une solution particulière à

$$y'' + 2y' + 2y = x^2. \quad (5)$$

et d'autre part, une solution particulière à

$$y'' + 2y' + 2y = \sin(x). \quad (6)$$

Ainsi la solution particulière à l'équation (4) sera par linéarité somme des solutions particulières aux équations (5) et (6)

Pour l'équation (5), puisque le membre de droite est une fonction polynômiale, on essaie des solutions de la forme $y = Px^2 + Qx + R$ avec P, Q, R des constantes. En injectant ce polynôme dans l'équation, on trouve $P = \frac{1}{2}, Q = -1$ et $R = \frac{1}{2}$ ce qui donne la solution $y_1 = \frac{1}{2}x^2 - x + \frac{1}{2}$.

Pour l'équation (6), puisque le membre de droite est une fonction trigonométrique, on essaie des solutions de la forme $y = C \sin(x) + D \cos(x)$ avec C, D des constantes. En injectant dans l'équation, on trouve $C = \frac{1}{5}$ et $D = -\frac{2}{5}$ ce qui donne la solution $y_2 = \frac{1}{5} \sin(x) - \frac{2}{5} \cos(x)$.

Alors, la solution particulière à l'équation (4) est

$$y_P = y_1 + y_2 = \frac{1}{2}x^2 - x + \frac{1}{2} + \frac{1}{5} \sin(x) - \frac{2}{5} \cos(x)$$

On conclut que la solution générale est la somme de la solution particulière avec les solutions de l'ELHA :

$$y = \frac{1}{2}x^2 - x + \frac{1}{2} + \frac{1}{5} \sin(x) - \frac{2}{5} \cos(x) + A \cos(x)e^{-x} + B \sin(x)e^{-x}, \text{ avec } A, B \in \mathbb{R}.$$

Exercice 18.40

d) On résoud l'équation linéaire à coefficients constants

$$y'' + 4y = 2 \cos(2x),$$

avec C.I. $y(0) = 0$ et $y'(0) = \frac{1}{2}$.

Première étape, on résoud l'ELHA

$$y'' + 4y = 0.$$

L'équation caractéristique associée est

$$\lambda^2 + 4 = 0,$$

ses solutions sont $\lambda = \pm 2i$. Ainsi,

$$y_{ELHA} = A \cos(2x) + B \sin(2x), \text{ avec } A, B \in \mathbb{R}.$$

Ensuite, on cherche une solution particulière à l'équation

$$y'' + 4y = 2 \cos(2x). \quad (7)$$

Le membre de droite est une fonction trigonométrique, cependant on ne peut pas utiliser de candidat solution qui soit une combinaison linéaire de $\cos(2x)$ et $\sin(2x)$ car ces fonctions sont solutions de l'ELHA. Dans ce cas particulier, on s'en sort en essayant de trouver une solution particulière de la forme $y = Cx \cos(2x) + Dx \sin(2x)$ avec C, D des constantes réelles. En injectant ce candidat dans l'équation (7), on trouve $C = 0$ et $D = \frac{1}{2}$. Ainsi,

$$y_P = \frac{1}{2}x \sin(2x).$$

La solution générale est la somme de la solution particulière avec les solutions de l'ELHA :

$$y = \frac{1}{2}x \sin(2x) + A \cos(2x) + B \sin(2x), \text{ avec } A, B \in \mathbb{R}.$$

Enfin, on détermine les constantes grâce aux C.I., $y(0) = 0$ donc $A = 0$ et $y'(0) = \frac{1}{2}$ donc $B = \frac{1}{4}$. La solution est donc

$$y = \frac{1}{2}x \sin(2x) + \frac{1}{4} \sin(2x)$$

Exercice 18.47

Il s'agit de déterminer les fonctions y qui sont solutions de l'équation différentielle

$$y'' + y' = 0,$$

avec $y(0) = 0$.

Posons $z = y'$, alors la fonction z satisfait l'équation différentielle

$$z' + z = 0,$$

qui a pour solution $z = A.e^{-x}$ avec $A \in \mathbb{R}$.

Ensuite, comme $y' = z = A.e^{-x}$, alors $y = -A.e^{-x} + C$ avec $A, C \in \mathbb{R}$. Puisqu'on veut $y(0) = 0$, il faut que $C = A$. Les solutions recherchées sont donc

$$y = -A.e^{-x} + A \text{ avec } A \in \mathbb{R}.$$