

MATH-F112 Module T

Correction du TP9

Primitives

Exercice 11.2

(b) La primitive de $\sin x$ est $-\cos x$, on calcule donc la dérivée

$$(\cos(3x-2))' = -3 \sin(3x-2)$$

Et donc

$$\int \sin(3x-2) dx = -\frac{1}{3} \cos(3x-2) + C.$$

(i) Comme on a :

$$(2^x)' = 2^x \ln(2)$$

on en déduit que

$$\int 2^x dx = \frac{2^x}{\ln(2)}$$

(t)

$$\int 0 dx = C.$$

(w) La primitive de $\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ est $\operatorname{arccosh}(x)$, on calcule donc la dérivée

$$\left(\operatorname{arccosh}\left(\frac{x}{a}\right)\right)' = \frac{1}{a\sqrt{\frac{x^2}{a^2}-1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}$$

Et donc

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}} dx = \operatorname{arccosh}\left(\frac{x}{a}\right) + C.$$

(y) On observe

$$\int \frac{\arctan(x)}{1+x^2} dx = \int \arctan(x) * (\arctan(x))' dx = \frac{1}{2}(\arctan(x))^2 + C.$$

Exercice 11.3

(a) Par la linéarité de l'intégrale, on trouve :

$$\int x + \sqrt{x} dx = \int x dx + \int \sqrt{x} dx = \frac{x^2}{2} + \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3} + C.$$

(d) Nous nous rappelons que $(\tan(x))' = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan(x)^2$, donc

$$\int \tan(x)^2 dx = \int 1 + \tan(x)^2 - 1 dx$$

Et par linéarité de l'intégrale, on trouve

$$\int 1 + \tan(x)^2 - 1 dx = \tan(x) - x + C.$$

Exercice 11.4

(k) On prend le changement de variable $u = \tan(x) - 1$, on a alors $u'(x) = 1 + \tan(x)^2 = \frac{\cos(x)^2 + \sin(x)^2}{\cos(x)^2} = \frac{1}{\cos(x)^2}$.

Nous trouvons alors l'intégrale :

$$\int \frac{1}{\cos(x)^2 \sqrt{\tan(x) - 1}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{u}} du = 2\sqrt{u} + C = 2\sqrt{\tan(x) - 1} + C.$$

(p) On prend le changement de variable $u = \ln(|\sin(x)|)$, on a alors $u'(x) = \frac{1}{\sin(x)} \cos(x)$.

L'intégrale devient donc :

$$\int \cot(x) \ln(|\sin(x)|) dx = \int u du = \frac{u^2}{2} + C = \frac{\ln(|\sin(x)|)^2}{2} + C.$$

Exercice 11.6

(f) Nous voulons intégrer par partie ; le facteur le plus facilement intégrable est $\frac{1}{x}$, nous posons donc :

$$\begin{cases} f'(x) = \frac{1}{x} & \rightarrow f(x) = \int \frac{1}{x} dx = \ln(x) \\ g(x) = \ln(\ln(x)) & \rightarrow g'(x) = \frac{1}{x \ln(x)} \end{cases}.$$

Par la formule d'intégration par parties, nous trouvons donc :

$$\int \frac{1}{x} \ln(\ln(x)) dx = \ln(x) \ln(\ln(x)) - \int \frac{1}{x} dx = \ln(x) \ln(\ln(x)) - \ln(x) + C.$$

(p) Observons que l'intégrale

$$\int \frac{x}{\cos^2(x)} dx$$

ne peut pas être résolue par intégration immédiate. Pour la résoudre, utilisons la formule d'intégration par parties. Posons

$$\begin{cases} f'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} & \rightarrow f(x) = \int \frac{1}{\cos^2(x)} dx = \tan(x) \\ g(x) = x & \rightarrow g'(x) = 1 \end{cases}.$$

On déduit alors par la formule d'intégration par parties que

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{\cos^2(x)} dx &= x \tan(x) - \int \tan(x) \cdot 1 dx \\ \Leftrightarrow \int \frac{x}{\cos^2(x)} dx &= x \tan(x) - \int \tan(x) dx \\ \Leftrightarrow \int \frac{x}{\cos^2(x)} dx &= x \tan(x) + \int \frac{(-\sin(x))}{\cos(x)} dx \\ \Leftrightarrow \int \frac{x}{\cos^2(x)} dx &= x \tan(x) + \ln[|\cos(x)|] + C \quad \text{où } C \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Exercice 11.7

- (a) On commence par calculer le déterminant $\Delta = -44$, on doit donc compléter le carré $3x^2 - 2x + 4 = (\sqrt{3}x - \frac{1}{\sqrt{3}})^2 + \frac{11}{3}$.

On pose alors le changement de variable $u = \sqrt{3}x - \frac{1}{\sqrt{3}}$, donc $u'(x) = \sqrt{3}$. On a alors l'intégrale suivante :

$$\int \frac{1}{3x^2 - 2x + 4} dx = \int \frac{1}{(\sqrt{3}x - \frac{1}{\sqrt{3}})^2 + \frac{11}{3}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{3}(u^2 + \frac{11}{3})} du = \frac{1}{\sqrt{11}} \arctan(\sqrt{\frac{3}{11}}u) + C$$

Et on trouve donc

$$\int \frac{1}{3x^2 - 2x + 4} dx = \frac{\arctan(\frac{3x-1}{\sqrt{11}})}{\sqrt{11}} + C.$$

- (i) On trouve que les 2 racines de $x^2 + 6x + 5$ sont -5 et -1 , on a donc $x^2 + 6x + 5 = (x+5)(x+1)$. On calcule donc :

$$\frac{x+4}{x^2+6x+5} = \frac{x+4}{(x+5)(x+1)} = \frac{A}{x+5} + \frac{B}{x+1}.$$

En calculant, on trouve $A = \frac{1}{4}$ et $B = \frac{3}{4}$. L'intégrale vaut donc :

$$\int \frac{x+4}{x^2+6x+5} dx = \int \frac{1}{4(x+5)} + \frac{3}{4(x+1)} dx = \frac{1}{4}(\ln(x+5) + 3\ln(x+1)) + C.$$

- (j) On trouve que les 2 racines de $6x^2 + x - 1$ sont $-\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{3}$, on a donc $6x^2 + x - 1 = 6(x + \frac{1}{2})(x - \frac{1}{3})$. On calcule donc :

$$\frac{7x+1}{6x^2+x-1} = \frac{7x+1}{6(x+\frac{1}{2})(x-\frac{1}{3})} = \frac{1}{6} \left(\frac{A}{x+\frac{1}{2}} + \frac{B}{x-\frac{1}{3}} \right) + C.$$

En calculant, on trouve $A = 3$ et $B = 4$. L'intégrale vaut donc :

$$\int \frac{7x+1}{6x^2+x-1} dx = \frac{1}{6} \int \frac{3}{x+\frac{1}{2}} + \frac{4}{x-\frac{1}{3}} dx = \frac{1}{6} (3\ln(x+\frac{1}{2}) + 4\ln(x-\frac{1}{3})).$$

Exercice 11.8

- (d) Tout d'abord, en complétant le carré, on voit que le polynôme dans la racine s'écrit $2 - 3x - x^2 = -((x + \frac{3}{2})^2 - \frac{17}{4})$. On peut alors faire le changement de variable $u = x + \frac{3}{2}$, on a alors $u'(x) = 1$ et l'intégrale s'écrit alors :

$$\int \frac{1}{\sqrt{2-3x-x^2}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{\frac{17}{4}-u^2}} du.$$

On peut alors faire un nouveau changement de variable $v = \frac{2u}{\sqrt{17}}$, ce qui donne $v'(u) = \frac{2}{\sqrt{17}}$. L'intégrale devient :

$$\int \frac{1}{\sqrt{\frac{17}{4}-u^2}} du = \int \frac{2}{\sqrt{17}\sqrt{\frac{17}{4}-\frac{17v^2}{4}}} dv = \int \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} dv = \arcsin(v) + C = \arcsin\left(\frac{2x+3}{\sqrt{17}}\right) + C.$$

- (e) Tout d'abord, en complétant le carré, on voit que le polynôme dans la racine s'écrit $5x^2 - x - 1 = (\sqrt{5}x - \frac{1}{2\sqrt{5}})^2 - \frac{21}{20}$. On pose alors le changement de variable $u = \sqrt{5}x - \frac{1}{2\sqrt{5}}$, ce qui donne $u'(x) = \sqrt{5}$. L'intégrale devient :

$$\int \frac{1}{\sqrt{5x^2-x-1}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{(\sqrt{5}x - \frac{1}{2\sqrt{5}})^2 - \frac{21}{20}}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{5}\sqrt{u^2 - \frac{21}{20}}} du.$$

En posant $v = u\frac{\sqrt{20}}{\sqrt{21}}$, on a $v'(u) = \frac{\sqrt{20}}{\sqrt{21}}$ et donc :

$$\int \frac{1}{\sqrt{5}\sqrt{u^2 - \frac{21}{20}}} du = \int \frac{\sqrt{21}}{\sqrt{20}\sqrt{5}\sqrt{\frac{21}{20}v^2 - \frac{21}{20}}} dv = \frac{1}{\sqrt{5}} \int \frac{1}{\sqrt{v^2 - 1}} dv.$$

Nous trouvons donc :

$$\int \frac{1}{\sqrt{5x^2 - x - 1}} dx = \frac{1}{\sqrt{5}} \operatorname{arccosh}(v) + C = \frac{1}{\sqrt{5}} \operatorname{arccosh}\left(\frac{\sqrt{20}}{\sqrt{21}}\left(\sqrt{5}x - \frac{1}{2\sqrt{5}}\right)\right) + C.$$

Exercice 11.16

(e) Nous avons calculé cette intégrale au 11.3 (d).

(f) Nous utilisons les formules de Simpson pour trouver $\sin(3x)\cos(5x) = \frac{1}{2}(\sin(2x) + \sin(8x))$. Notre intégrale est donc :

$$\int \sin(3x)\cos(5x) dx = \frac{1}{2} \left(\int \sin(2x) dx + \int \sin(8x) dx \right) = -\frac{1}{4}\cos(2x) - \frac{1}{16}\cos(8x) + C.$$

(o) Comme $\cos^2(x) = 1 - \sin^2(x)$ on peut effectuer le calcul suivant :

$$\int \sin^3(x) \cos^3(x) dx = \int \left(\sin^3(x) \cos(x) - \sin^5(x) \cos(x) \right) dx = \frac{1}{4} \sin^4(x) - \frac{1}{6} \sin^6(x) + C$$

(p) À l'aide des égalités suivantes : $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$ et $\cos^2(x) - \sin^2(x) = \cos(2x)$, on obtient : $\cos^2(x) = \frac{1}{2}(1 + \cos(2x))$.

$$\int \cos^2(x) dx = \frac{1}{2} \int (1 + \cos(2x)) dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin(2x) + C$$

(u)

$$\int \frac{1}{\sin(x)} dx = \int \frac{\sin(x)}{\sin^2(x)} dx = \int \frac{\sin(x)}{1 - \cos^2(x)} dx$$

En posant $u = \cos(x)$ on obtient : $u'(x) = -\sin(x)$ et

$$\int \frac{1}{u^2 - 1} du$$

C'est l'intégrale d'une fonction rationnelle. On factorise le dénominateur : $u^2 - 1 = (u - 1)(u + 1)$.

On calcule A et B afin que

$$\frac{1}{(u - 1)(u + 1)} = \frac{A}{u - 1} + \frac{B}{u + 1}$$

et on obtient $A = \frac{1}{2}$ et $B = -\frac{1}{2}$. L'intégrale vaut donc :

$$\int \frac{1}{u^2 - 1} du = \frac{1}{2} \int \frac{1}{u - 1} du - \frac{1}{2} \int \frac{1}{u + 1} du = \frac{1}{2} \ln|u - 1| - \frac{1}{2} \ln|u + 1| + C$$

En revenant à la variable de départ x ; on a :

$$\int \frac{1}{\sin(x)} dx = \frac{1}{2} \ln|\cos(x) - 1| - \frac{1}{2} \ln|\cos(x) + 1| + C = \ln \sqrt{\frac{\cos(x) - 1}{\cos(x) + 1}} + C$$