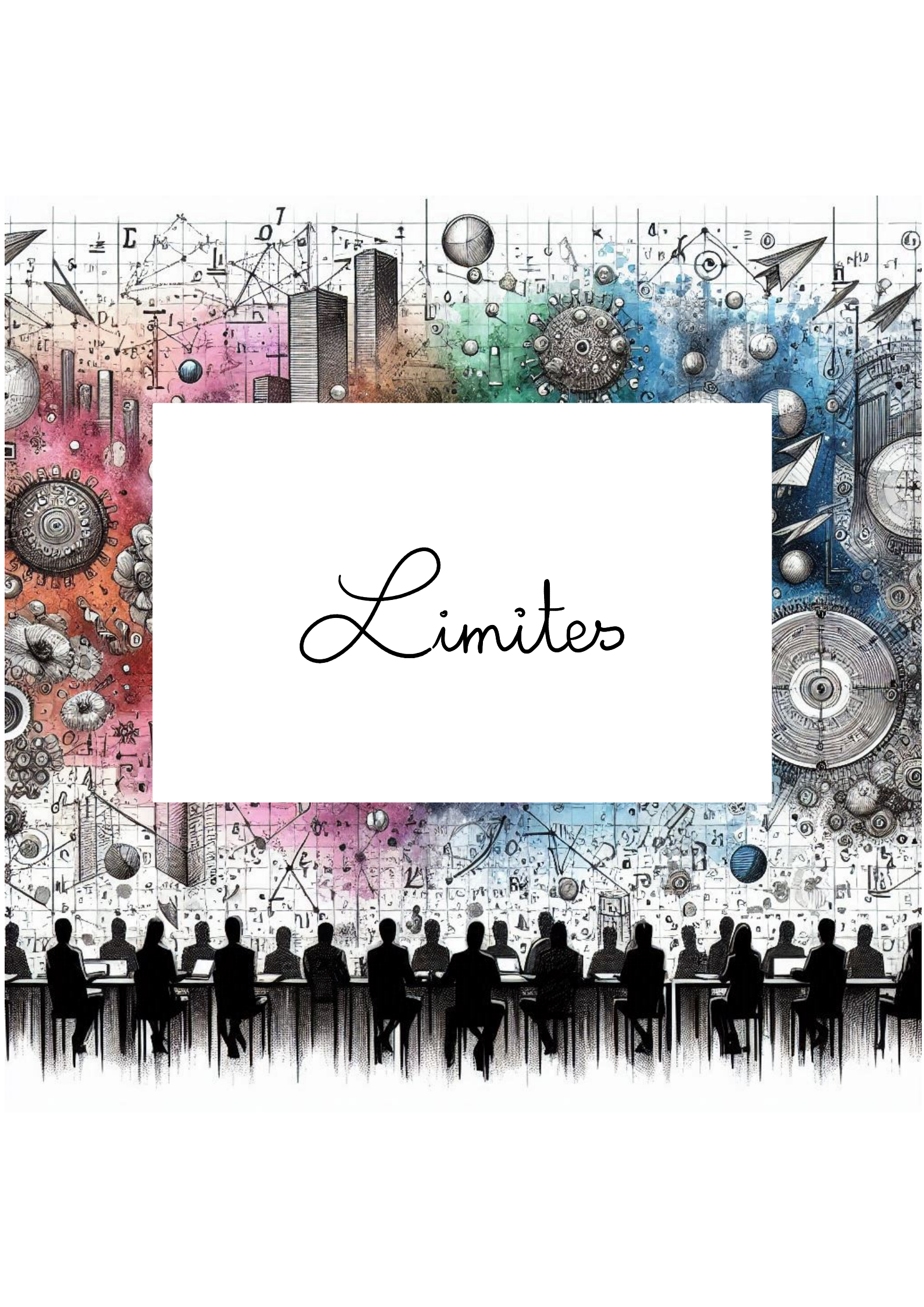




Limites

LIMITE À L'INFINI

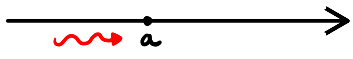
$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)$$

↪ bien préciser!

LIMITE EN UN POINT

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$$

* à droite de a : $x \xrightarrow{>} a$ 

* à gauche de a : $x \xrightarrow{<} a$ 

REFLEXES

- ① Remplacer par la valeur
- ② Simplifier en factorisant ou en développant
- ③ Utiliser des techniques particulières

ex1: fonctions trigonométriques et $t \rightarrow 0$:

↪ faire apparaître $\frac{\sin t}{t} \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} 1$

ex2: $\sqrt{\sim} \pm \sqrt{\sim}$

↪ utiliser le binôme conjugué

ex3: $x \rightarrow \pm\infty$

↪ mettre en évidence le terme dominant

8.4. Calculer les limites suivantes :

a. $\lim_{x \rightarrow 1} (3x^2 + 1)$

e. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(1+h)^2 - 1}{h}$

c. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$

a. $\lim_{x \rightarrow 1} (3x^2 + 1) = 3 \cdot (1)^2 + 1 = 4$

c. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} \left(= \frac{1-1}{1-1} = \frac{0}{0} \rightarrow \text{indéterminé} \right)$

$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} x+1 = 1+1 = 2$

e. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(1+h)^2 - 1}{h} \begin{matrix} =0 \\ =0 \end{matrix} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 + 2h + 1 - 1}{h}$

$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(h+2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} h+2$

$= 2$

8.5. Calculer les limites à gauche et à droite en 0 de

a. $2x + \frac{|x|}{x}$;

limite à droite: $\lim_{x \rightarrow 0^+} 2x + \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} 2x + \frac{x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} 2x + 1 = 1$

limite à gauche: $\lim_{x \rightarrow 0^-} 2x + \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} 2x + \frac{-x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} 2x - 1 = -1$

8.8. Calculer les limites pour $x \rightarrow +\infty$ et pour $x \rightarrow -\infty$ des fonctions $y = y(x)$ suivantes :

a. $y = 5x^6 + 3x^3 - 7x^2 + 15$

d. $y = \frac{x-4}{x^2-6x+8}$

j. $y = \sqrt{2x^2-3x-5} - \sqrt{2x^2+3x-5}$

$$\text{a. } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} 5x^6 + 3x^3 - 7x^2 + 15 = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^6 \left(5 + \frac{3}{x^3} - \frac{7}{x^4} + \frac{15}{x^6} \right) = +\infty$$

$$\text{d. } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x-4}{x^2-6x+8} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x(1-\frac{4}{x})}{x^2(1-\frac{6}{x}+\frac{8}{x^2})} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x} = 0$$

NB: 0^+ si $x \rightarrow +\infty$
 0^- si $x \rightarrow -\infty$

$$\text{j. } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sqrt{2x^2-3x-5} - \sqrt{2x^2+3x-5} = \frac{(\sqrt{2x^2-3x-5} + \sqrt{2x^2+3x-5})(\sqrt{2x^2-3x-5} - \sqrt{2x^2+3x-5})}{\sqrt{2x^2-3x-5} + \sqrt{2x^2+3x-5}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-6x}{\sqrt{2x^2-3x-5} + \sqrt{2x^2+3x-5}} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-6x}{|x|(\sqrt{2-\frac{3}{x}-\frac{5}{x^2}} + \sqrt{2+\frac{3}{x}-\frac{5}{x^2}})}$$

Δ signe de x

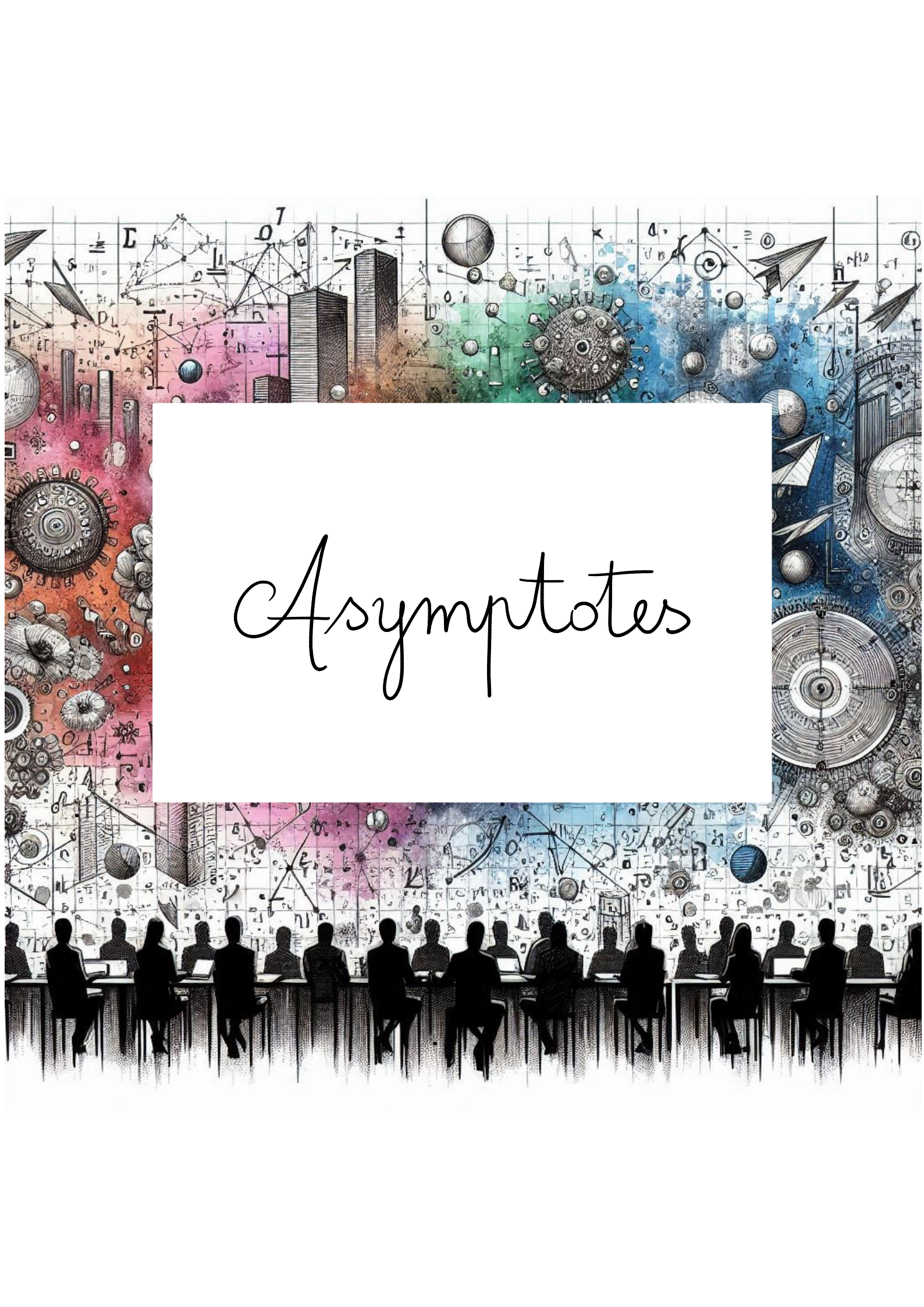
$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-6x}{x(\sqrt{2}+\sqrt{2})} = \frac{-6}{2\sqrt{2}} = -\frac{3\sqrt{2}}{2} \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-6x}{-x(\sqrt{2}+\sqrt{2})} = \frac{6}{2\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2} \end{array} \right.$$

$$\underline{\underline{\infty}} \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-6x}{|x| 2\sqrt{2}} = \pm \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

8.9. Sachant que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, que valent les limites pour $x \rightarrow 0$ des quantités

c. $\frac{x \sin x}{1 - \cos x}$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x}{1 - \cos x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x}{1 - \cos x} \cdot \frac{1 + \cos x}{1 + \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x (1 + \cos x)}{1 - \cos^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x (1 + \cos x)}{\sin^2 x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \cos x}{\frac{\sin x}{x}} = 2 \end{aligned}$$



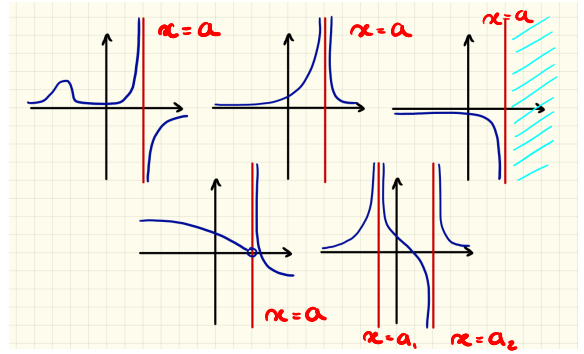
Asymptotes

ASYMPTOTES VERTICALES

$$AV \equiv x = a \rightarrow a \notin \text{dom} f$$

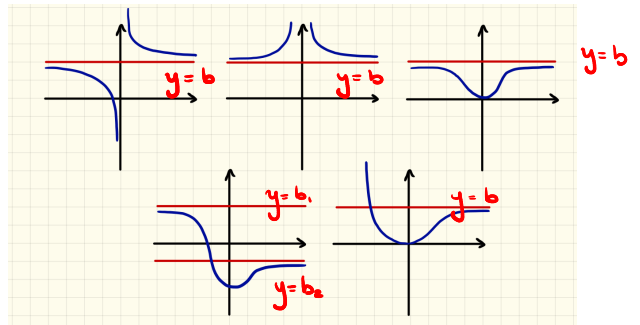
mais a est adhérent à $\text{dom} f$

$$\text{et } \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} f(x) = \pm \infty$$



ASYMPTOTES HORIZONTALES

$$AH \equiv y = b \rightarrow \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ \text{ou} -\infty}} f(x) = b$$

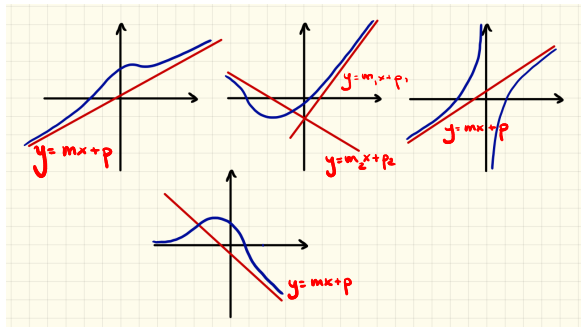


ASYMPTOTES OBLIQUES

$$AO \equiv y = mx + p$$

$$\rightarrow m = \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ \text{ou} -\infty}} \frac{f(x)}{x} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$\rightarrow p = \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ \text{ou} -\infty}} f(x) - mx \in \mathbb{R}$$



Remarque: Il n'est pas possible d'avoir une AH et une AO du même côté

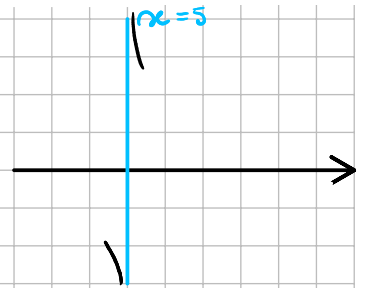
8.10. Trouver les asymptotes aux graphes des fonctions $y = y(x)$ suivantes :

b. $y = 2x + 7 + \frac{1}{x-5}$

* Asymptote(s) verticale(s) $\text{dom } y = \mathbb{R} \setminus \{5\}$

$$\rightarrow \lim_{x \rightarrow 5} 2x + 7 + \frac{1}{x-5} = \pm \infty$$

$\xrightarrow{x \rightarrow 5} 0^\pm$



* Asymptote(s) horizontale(s)

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} 2x + 7 + \frac{1}{x-5} = \pm \infty \rightarrow \text{pas d'asymptote horizontale}$$

* Asymptote(s) oblique(s)

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{1}{x} \cdot \left(2x + 7 + \frac{1}{x-5} \right) = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} 2 + \frac{7}{x} + \frac{1}{x(x-5)} = 2$$

pente

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \left(2x + 7 + \frac{1}{x-5} \right) - 2x = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} 7 + \frac{1}{x-5} = 7$$

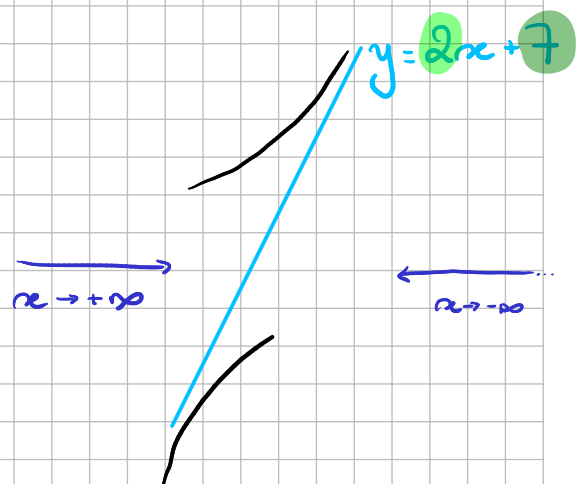
ordonnée à l'origine

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \left(2x + 7 + \frac{1}{x-5} \right) - (2x + 7)$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x-5} = 0^+ \rightarrow \text{au dessus}$$

et

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x-5} = 0^- \rightarrow \text{en dessous}$$



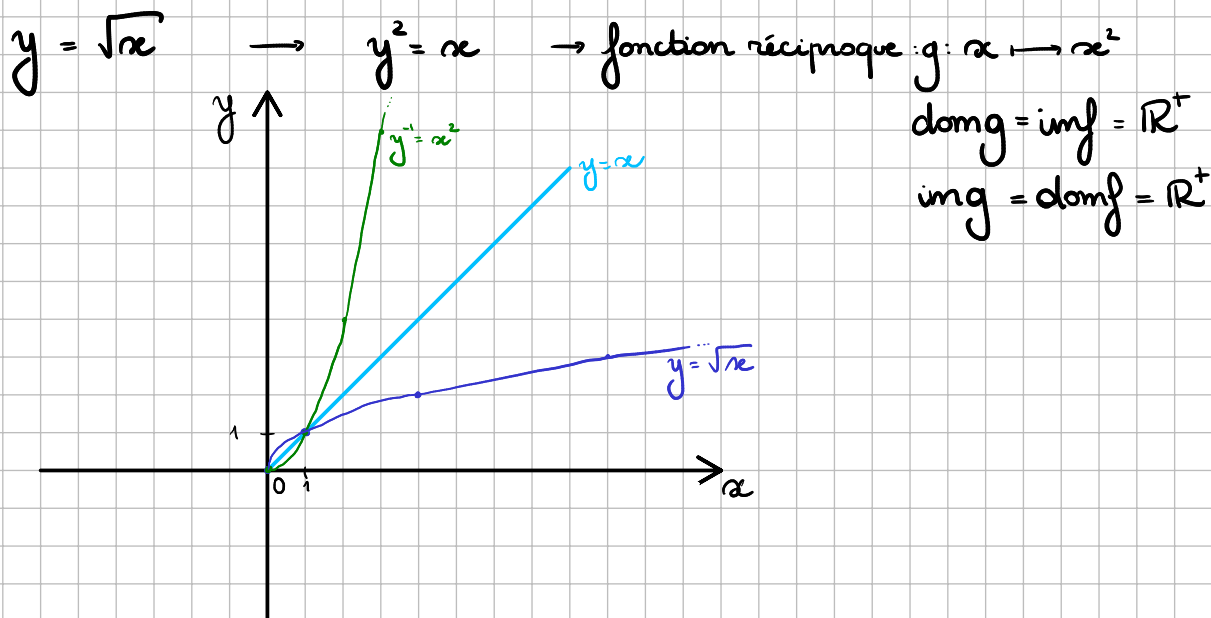
La fonction possède une asymptote verticale en $x=5$
et une asymptote oblique d'équation $y = 2x + 7$.

8.11. Pour chacune des fonctions $y = y(x)$ suivantes :

déterminer le plus grand domaine et la fonction réciproque si elle existe. Représenter la fonction, sa fonction réciproque et la première bissectrice sur le même graphique.

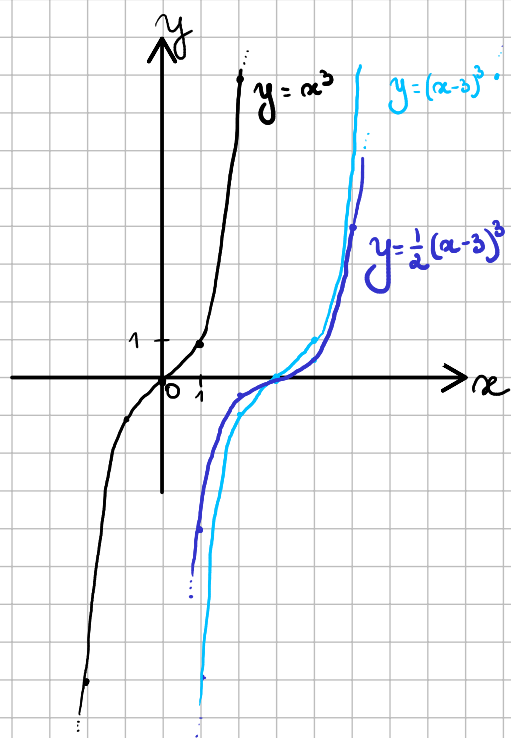
b. $y = \sqrt{x}$

CE: $x \geq 0 \rightarrow \text{dom } f = \mathbb{R}^+ ; \text{im } f = \mathbb{R}^+$



b') $y = \frac{1}{2}(x-3)^3$

CE: $\mathbb{R} \rightarrow \text{dom } f = \mathbb{R} ; \text{im } f = \mathbb{R}$

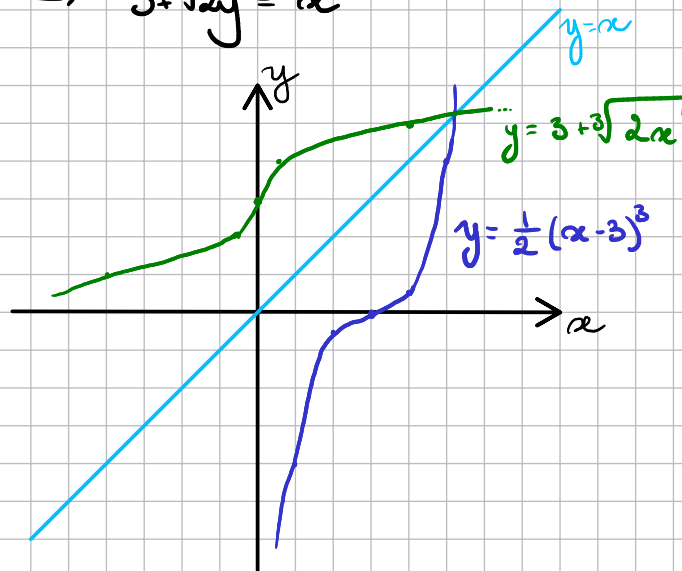


$y = \frac{1}{2}(x-3)^3$

$\rightarrow 2y = (x-3)^3$

$\rightarrow \sqrt[3]{2y} = x-3$

$\rightarrow 3 + \sqrt[3]{2y} = x$



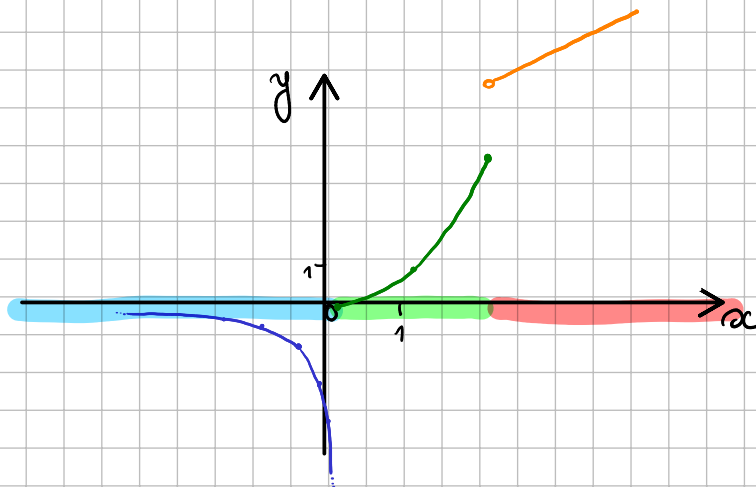
8.12. Soit la fonction f donnée par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{pour } x < 0, \\ x^2 & \text{pour } 0 \leq x \leq 2, \\ x+4 & \text{pour } 2 < x. \end{cases}$$

- Calculer $f(-2)$, $f(0)$, $f\left(\frac{3}{2}\right)$, $f(3)$.
- Tracer le graphe de f .
- Déterminer le plus grand domaine de définition et l'image de f .
- Calculer les limites à gauche et à droite de f en 0, en 1 et en 2.
- En quels points f est-elle continue ?

a) $f(-2) = \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2}$; $f(0) = 0^2 = 0$; $f\left(\frac{3}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$; $f(3) = 3+4 = 7$.

b)



c) CE: $\left. \begin{array}{l} \cdot \frac{1}{x} : x \neq 0 \rightarrow \infty \text{ car } x < 0 \\ \cdot x^2 : \text{---} \\ \cdot x+4 : \text{---} \end{array} \right\} \text{dom} f = \mathbb{R}$

$$\text{Im} f =]-\infty; 0[\cup [0, 4] \cup [6, +\infty[=]-\infty; 4] \cup [6, +\infty[$$

d) $x \rightarrow 0$

$$\cdot \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$$

$$\cdot \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$$

$x \rightarrow 1$

$$\cdot \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} x^2 = 1$$

$$\cdot \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} x+4 = 5$$

$x \rightarrow 2$

$$\cdot \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} x^2 = 4$$

$$\cdot \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} x+4 = 6$$

e) La fonction f est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{0, 2\}$ car elle est continue en chacune de ses parties ($\frac{1}{x}$, x^2 et $x+4$ sont continues sur les domaines attribués) mais en 0 et en 2, les limites à gauche et à droite ne correspondent pas.

