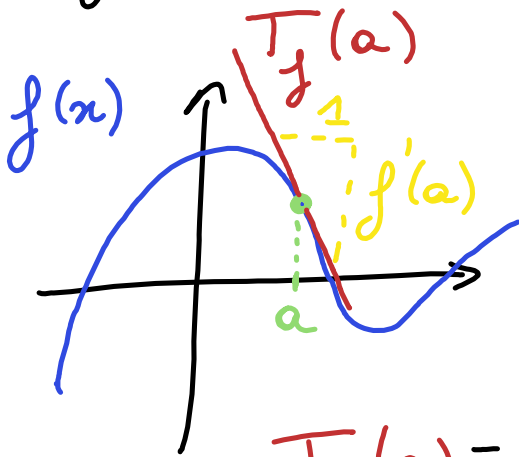


Dérivées ❤️

Rappels

- $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$
- $(k \cdot f(x))' = k \cdot f'(x)$
- $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) g'(x)$
- $(f(x)/g(x))' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$

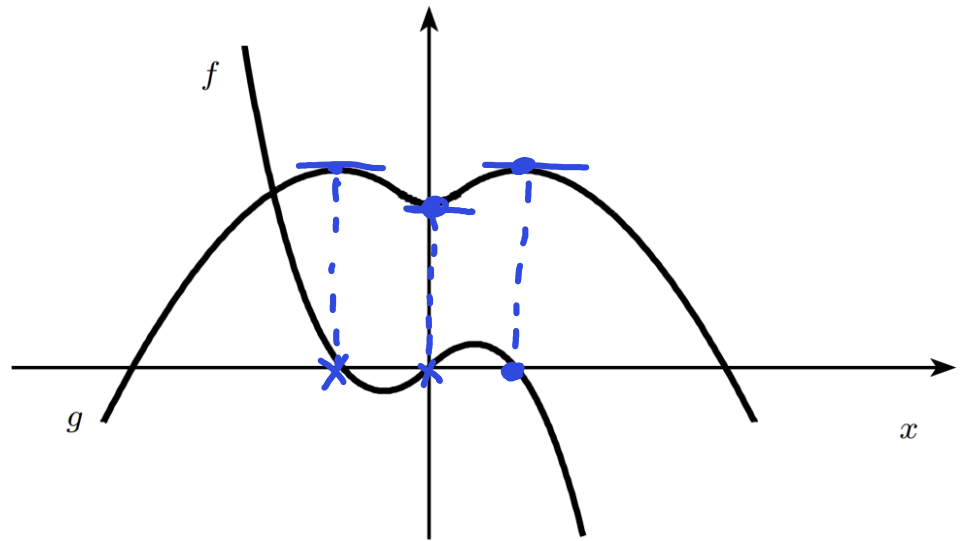


$$T_f(a) \equiv y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

$$\approx d \equiv y - b = m(x - a)$$

- $f(x)$ a un extremum en x_0
si $f'(x_0) = 0$

9.2. Voici, dans le même système d'axes, les graphes de deux fonctions f et g .
Laquelle de ces deux fonctions est la dérivée de l'autre ?



On voit que f doit être négative la plupart du temps.

De l'autre côté, on voit que g a un minimum et des maxima où f est nulle

Donc $g' = f$

9.10. Calculer les dérivées premières des fonctions $y = y(x)$ suivantes (où a, b et c sont des constantes)

a) ~~$y = x^6 - 3x^4 + 19x^3 - 8x + 4$~~ ; h) ~~$y = (2 - x)(1 - 5x)$~~ ;

b) ~~$y = \frac{x^8}{8(1-x^2)^4}$~~ ;

i) $y = \frac{4}{3} \sqrt[4]{\frac{x-1}{x+2}}$;

c) $y = (2x+1)(3x+2)\sqrt[3]{3x+2}$; j) ~~$y = \frac{1}{8}(1+x^3)^{8/3} - \frac{1}{5}(1+x^3)^{5/3}$~~ ;

$$\begin{aligned} c) & \left[(2x+1)(3x+2)\sqrt[3]{3x+2} \right]' \\ &= \left[(2x+1) \cdot (3x+2)^{4/3} \right]' \\ &= \left[(2x+1) \right]' (3x+2)^{4/3} + (2x+1) \left[(3x+2)^{4/3} \right]' \\ &= 2 \cdot (3x+2)^{4/3} + (2x+1) \cdot \frac{4}{3} (3x+2)^{1/3} \cdot 3 \\ &= (3x+2)^{1/3} \cdot (2 \cdot (3x+2) + (2x+1) \cdot 4) \\ &= (3x+2)^{1/3} \cdot (14x+8) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} i) & \left[\frac{4}{3} \sqrt[4]{\frac{x-1}{x+2}} \right]' = \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{x-1}{x+2} \right)^{-3/4} \cdot \left(\frac{x-1}{x+2} \right)' \\ &= \frac{1}{3} \sqrt[4]{\left(\frac{x+2}{x-1} \right)^3} \cdot \frac{(x-1)'(x+2) - (x-1)(x+2)'}{(x+2)^2} \\ &= \frac{1}{3} \sqrt[4]{\left(\frac{x+2}{x-1} \right)^3} \cdot \frac{(x+2) - (x-1)}{(x+2)^2} = \sqrt[4]{\frac{1}{(x-1)^3 (x+2)^5}} \\ &= (x-1)^{-3/4} (x+2)^{-5/4} \end{aligned}$$

9.16. Déterminer le(s) point(s) où la tangente à la courbe de $\mathbb{R}^2$ d'équation

$$y = \frac{x}{1-x^2} \quad \text{fait un angle de } 45^\circ \text{ avec } ox.$$

$$\text{pente} = 1$$

//

dérivée en ce(s) point(s)

$$\left(\frac{x}{1-x^2} \right)' = \frac{x'(1-x^2) - x(1-x^2)'}{(1-x^2)^2}$$

$$= \frac{1-x^2 + 2x^2}{(1-x^2)^2} = \frac{1+x^2}{(1-x^2)^2}$$

$$\boxed{\text{C.E.: } x \neq \pm 1}$$

$$\frac{1+x^2}{(1-x^2)^2} = 1 \quad \Leftrightarrow 1+x^2 = (1-x^2)^2$$

$$\Leftrightarrow 1+x^2 = 1 - 2x^2 + x^4$$

$$\Leftrightarrow x^4 - 3x^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 0 \quad \text{ou} \quad x^2 - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \quad \text{ou} \quad x = \pm \sqrt{3}$$

9.29. Pour les fonctions suivantes, $f(a) = f(b) = 0$
et pourtant f' ne s'annule pas sur l'intervalle $]a, b[$.
Pourquoi le théorème de Rolle ne s'applique-t-il pas ?

a) $y = \operatorname{tg} x$, sur $(0, \pi)$;

b) $y = 3^{|x|} - 9$, sur $(-2, 2)$;

Hypothèses pour le thm de Rolle :

- f continue sur $[a, b]$
- f dérivable sur (a, b)

a) $\operatorname{tg} x$ n'est pas continue
en $\frac{\pi}{2} \in (0, \pi)$.

b) $3^{|x|} - 9$ n'est pas dérivable
en $0 \in (-2, 2)$.

8.21. Calculer les dérivées premières des fonctions $x \mapsto y$ suivantes :

d) $y = 2^{\sqrt{x}}$;

$$(a^x)' = a^x \ln a$$

$$(a^{f(x)})' = f'(x) a^{f(x)} \ln a$$

$$\begin{aligned} \rightarrow (2^{\sqrt{x}})' &= (\sqrt{x})' \cdot 2^{\sqrt{x}} \ln 2 \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot 2^{\sqrt{x}} \ln 2 \end{aligned}$$