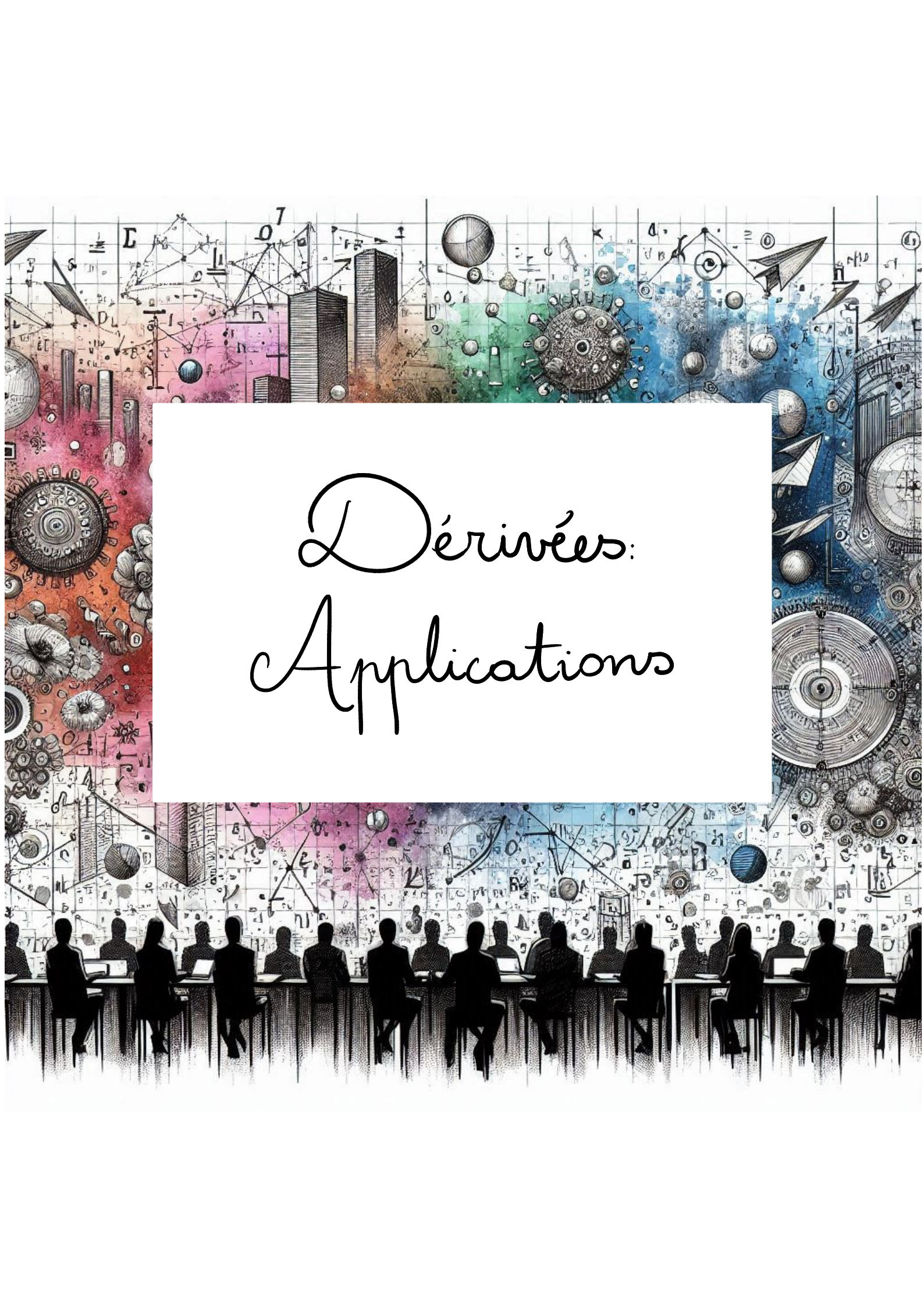
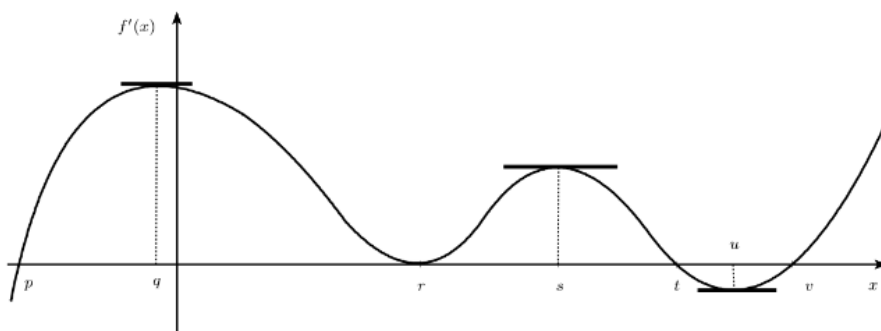




Dérivées: Applications



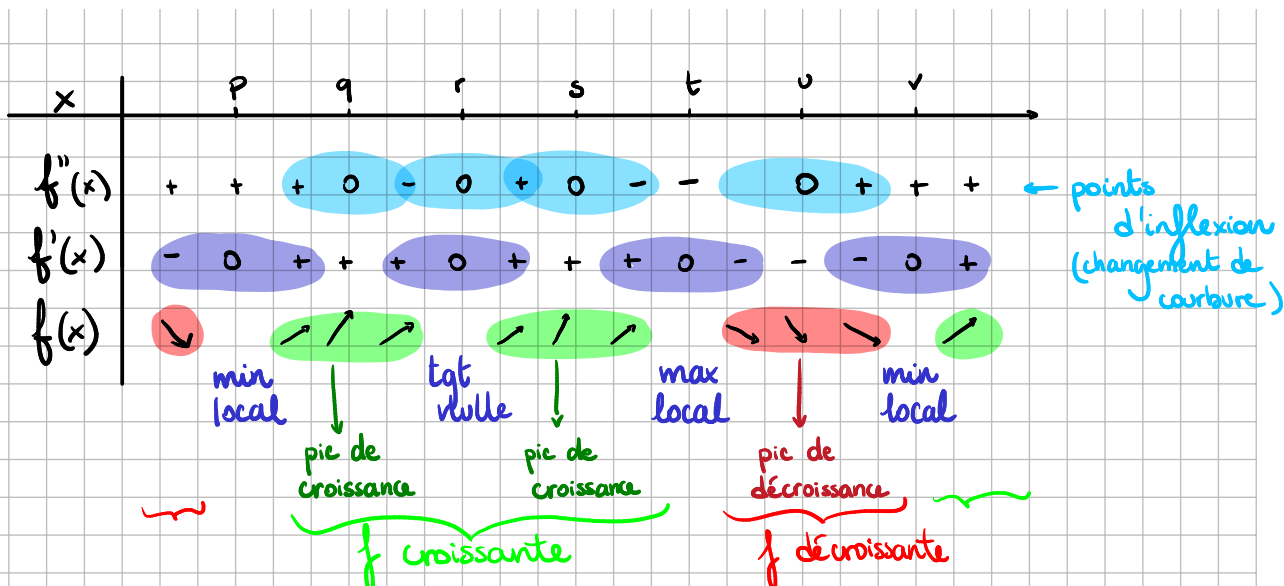
10.1. Si le graphe ci-dessous est celui de la fonction dérivée f' , pour quelle(s) valeur(s) de x la fonction $x \mapsto f(x)$ admet-elle



- un minimum local ?
- un maximum local ?
- un point d'inflexion à tangente horizontale ?
- un point d'inflexion ?

Sur quel sous-ensemble de l'intervalle $[a, h]$ la fonction f est-elle

- croissante ?
- décroissante ?



- La fonction admet un **minimum local** en $x=p$ et $x=v$.
- La fonction admet un **maximum local** en $x=t$.
- La fonction admet un **point d'inflexion** dont la tangente est nulle en $x=r$.
- La fonction admet un **point d'inflexion** en $x \in \{q, r, s, u\}$.
- La fonction est croissante sur $[p, t] \cup [v, +\infty[$
- La fonction est décroissante sur $] -\infty, p] \cup [t, v]$

10.12. Déterminer n pour que la fonction

$$y = (x - 6)^n e^x$$

admette un extrémum en $x = 4$. Quelle est la nature de cet extrémum ?

Si la fonction admet un extrémum en $x=4$ alors sa dérivée vaut 0 en ce point.

$$y' = n(x-6)^{n-1} \cdot e^x + (x-6)^n e^x \Leftrightarrow y' = e^x (x-6)^{n-1} (n + x - 6)$$

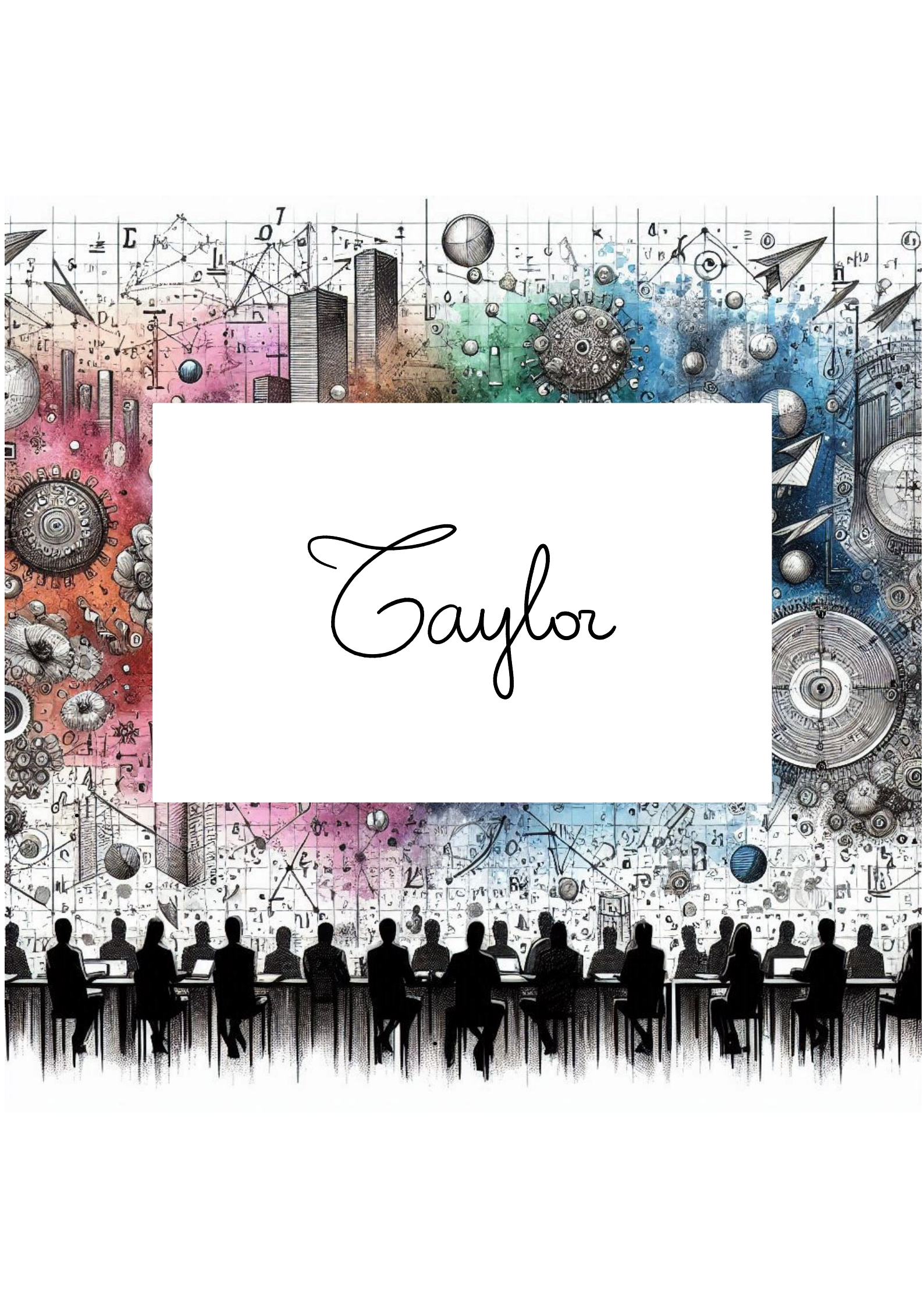
$$\text{Donc } y'=0 \text{ en } x=4 \Leftrightarrow e^4 (4-6)^{n-1} (n+4-6) = 0 \Leftrightarrow e^4 (-2)^{n-1} (n-2) = 0 \Leftrightarrow n=2.$$

$$\text{Alors } f(x) = e^x (x-6)^2$$

$$\text{et } f'(x) = e^x (x-6)(x-4)$$

x	4		6		
$x-6$	-	-	-	0	+
$x-4$	-	0	+	+	+
y'	+	0	-	0	+
y	max local				

Pour que la fonction donnée admette un extrémum en $x=4$, il faut que $n = 2$. Dans ce cas, cet extrémum est maximum local.



Taylor

POLYNÔME DE TAYLOR

de la fonction f autour du point a d'ordre k .

$$T_{f,a,k}(x) = \sum_{n=0}^k \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n$$

→ Approximation locale d'une fonction par un polynôme.

$$T_{f,a,k}(x) \approx f(x)$$

La précision augmente si

- * x est proche de a
- * k est grand

10.24. Développer en série de Taylor au voisinage du point indiqué chacune des fonctions suivantes :

h) $y = e^{\frac{x}{2}}$, pour $x = 2$, écrire le terme général ;

La série de Taylor de y autour de 2 : $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{y^{(n)}(2)}{n!} (x-2)^n$

On cherche la $n^{\text{ième}}$ dérivée de $e^{\frac{x}{2}}$: $y' = \frac{1}{2} e^{\frac{x}{2}}$; $y'' = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} e^{\frac{x}{2}}$

Montrons que $y^{(n)} = \left(\frac{1}{2}\right)^n e^{\frac{x}{2}}$, par récurrence.

Cas de base : $y^{(1)} = \frac{1}{2} e^{\frac{x}{2}} \rightarrow$ vérifié.

Hypothèse de récurrence : $y^{(n)} = \left(\frac{1}{2}\right)^n e^{\frac{x}{2}}$ pour un certain $N \in \mathbb{N}$.

Hérédité : Montrons que la proposition est alors vraie pour $N+1$:

$$y^{(N+1)} = \left(y^{(N)} \right)' = \left(\left(\frac{1}{2} \right)^N e^{\frac{x}{2}} \right)' = \left(\frac{1}{2} \right)^N \cdot \frac{1}{2} e^{\frac{x}{2}} = \left(\frac{1}{2} \right)^{N+1} e^{\frac{x}{2}}.$$

par hyp
de récurrence

L'hérédité est montrée, ce qui achève la preuve que $y^{(n)} = \left(\frac{1}{2}\right)^n e^{\frac{x}{2}} \forall n \in \mathbb{N}$. $\square$

Dès lors $y^{(n)}(2) = \left(\frac{1}{2}\right)^n e^{\frac{2}{2}} = \frac{e}{2^n}$.

La série de Taylor de la fonction y au voisinage de 2 est

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e}{2^n \cdot n!} (x-2)^n$$

10.25. Écrire le développement de Taylor à l'ordre 3, avec le reste, de la fonction $y = \sqrt[3]{x}$ dans le voisinage de $x = 27$. Utiliser ce développement pour calculer $\sqrt[3]{29}$.

$$T_{y,27,3}(x) = \sum_{n=0}^3 \frac{y^{(n)}(27)}{n!} (x-27)^n$$

$$= y(27) + y'(27)(x-27) + \frac{y''(27)}{2!} (x-27)^2 + \frac{y'''(27)}{3!} (x-27)^3$$

$$y(x) = \sqrt[3]{x}$$

$$y'(x) = (x^{-1/3})' = -\frac{1}{3} x^{-4/3}$$

$$y''(x) = \left(-\frac{1}{3} x^{-4/3}\right)' = \frac{4}{9} x^{-7/3}$$

$$y'''(x) = \left(\frac{4}{9} x^{-7/3}\right)' = -\frac{28}{27} x^{-10/3}$$

$$= \sqrt[3]{27} + \frac{1}{3} 27^{-4/3} (x-27) - \frac{28}{9} 27^{-7/3} \frac{1}{2} (x-27)^2 + \frac{28}{27} 27^{-10/3} \frac{1}{6} (x-27)^3$$

$$= 3 + \frac{1}{3} 3^{-2} (x-27) - \frac{28}{9} 3^{-5} (x-27)^2 + \frac{28}{27} 3^{-8} \frac{1}{6} (x-27)^3$$

$$T_{y,27,3}(x) = 3 + \frac{1}{3^3} (x-27) - \frac{14}{3^7} (x-27)^2 + \frac{14}{3^{12}} (x-27)^3$$

Évaluons $T_{y,27,3}$ en $x = 29$ pour donner une approximation de $\sqrt[3]{29}$:

$$\sqrt[3]{29} \approx T_{y,27,3}(29)$$

$$= 3 + \frac{1}{3^3} (29-27) - \frac{14}{3^7} (29-27)^2 + \frac{14}{3^{12}} (29-27)^3$$

$$= 3 + \frac{2}{3^3} - \frac{4}{3^7} + \frac{40}{3^{12}}$$

