

Intégrales multiples

(Syllabus Chapitre XVII, parties 1 à 4)

Contenu de la section

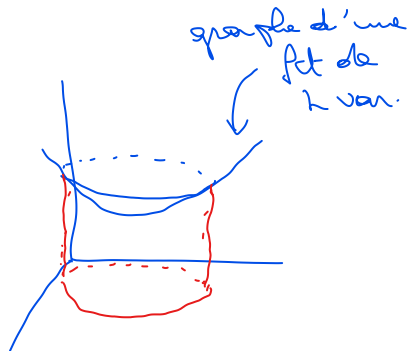
Définition et motivation

Contenu de la section

Définition et motivation

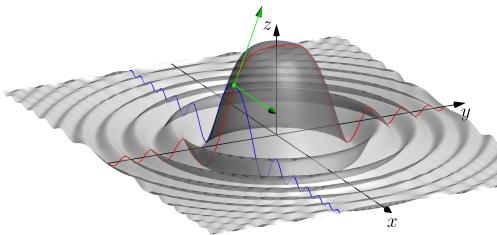
Heuristique

Définition d'une intégrale multiple



Rappel sur les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

Soit $f : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Son graphe est **une surface de $\mathbb{R}^3$** , d'équation

$$z = f(x, y).$$


Une fonction continue $f : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ (ou $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $n \geq 2$), délimite de la sorte un **volume particulier** de l'espace $\mathbb{R}^3$ (ou $\mathbb{R}^{n+1}$): le volume situé **entre le graphe de f et le plan horizontal $z = 0$** .

Ce volume se compose d'un morceau situé **au-dessus** du plan horizontal (en les points (x, y) où $f(x, y) \geq 0$) et d'un situé **en-dessous** (si $f(x, y) \leq 0$). En les points (x, y) tels que $f(x, y) = 0$, la surface de f intersecte le plan $\{z = 0\}$.

Comment calcule-t-on le volume de la région située entre le graphe de f et le plan $\{z = 0\}$? **Avec des intégrales à plusieurs variables.**

Contenu de la section

Définition et motivation

Heuristique

Définition d'une intégrale multiple

Une définition peu rigoureuse

Définition

Soit A un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. On appelle **intégrale (de Riemann) de f sur A** , notée:

$$\iint_A f(x,y) dx dy$$

le volume **algébrique** de la région comprise entre la surface d'équation $z = f(x,y)$ et le plan horizontal $z = 0$.

Précisément: l'intégrale de Riemann de f sur A est donnée par:

$$\iint_A f(x,y) dx dy = \text{vol}(S^+) - \text{vol}(S^-)$$

où $\text{vol } S^\pm$ représente le volume des ensembles S^+ et S^- , où f est respectivement au-dessus du plan $\{z = 0\}$ ou en-dessous:

$$S^+ = \left\{ (x,y,z) \text{ t.q. } \begin{array}{l} (x,y) \in A, \text{ et} \\ 0 \leq z \leq f(x,y) \end{array} \right\} \quad S^- = \left\{ (x,y,z) \text{ t.q. } \begin{array}{l} (x,y) \in A, \text{ et} \\ f(x,y) \leq z \leq 0 \end{array} \right\}$$

Un cas particulier: l'aire d'une région

Exemple

Regardons un cas particulier : pour $A \subset \mathbb{R}^2$, considérons la fonction constante égale à 1: $f(x,y) \equiv 1$ définie sur A . La région sous le graphe de f est:

$$\{(x,y,z) \text{ t.q. } (x,y) \in A \text{ et } z \in [0,1]\}.$$

C'est un solide dont la base est A et dont la hauteur est 1. Son volume est donc égal à l'aire de A (multiplié par 1). En particulier:

$$\text{Si } A \subset \mathbb{R}^2, \quad \iint_A 1 \, dx \, dy \text{ représente l'aire de } A.$$

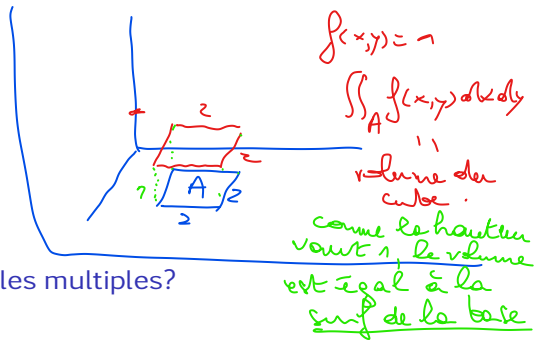
Exemple

Soit $A := [0,1] \times [0,\pi/2]$. Alors

$$\iint_A 1 \, dx \, dy = \text{Aire}(A) = 1 \times \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}.$$

C'est l'aire d'un rectangle.

Contenu de la section



Comment calculer des intégrales multiples?

Une différence importante

La différence fondamentale entre intégrales doubles et intégrales d'une fonction d'une variable réelle est **qu'il n'y a plus de méthode systématique pour calculer les intégrales doubles**. Notamment car la notion de primitive n'a plus de sens pour une fonction de deux variables.

Nous allons voir deux méthodes principales pour calculer des intégrales multiples qui marchent dans la plupart des cas: l'intégration une variable après l'autre (le **théorème de Fubini**) et le changement de variables.

Contenu de la section

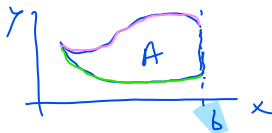
Comment calculer des intégrales multiples?

Domaines verticalement ou horizontalement simples et théorème de Fubini

Coordonnées polaires sur $\mathbb{R}^2$

Domaines verticalement simples

Sur certains domaines, le calcul d'intégrales doubles se ramène à deux calculs d'intégrales à une seule variable à la suite:



Définition

Un domaine $A \subset \mathbb{R}^2$ est dit **verticalement simple** s'il existe $a, b \in \mathbb{R}$ et des fonctions $g_1, g_2 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ telles que

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ t.q. } x \in [a, b], g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}.$$

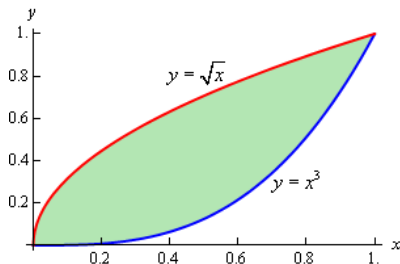
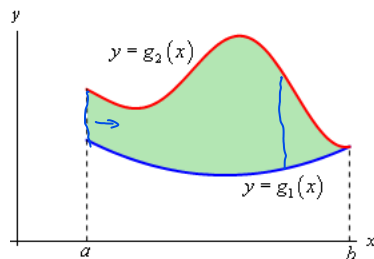
Le domaine est **horizontalement simple** s'il existe $c, d \in \mathbb{R}$ et des fonctions $h_1, h_2 : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ telles que

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ t.q. } y \in [c, d], h_1(y) \leq x \leq h_2(y)\}.$$

Exemples de domaines verticalement simples

Les domaines suivants (la région en vert) sont verticalement simples:

Case 1



Un domaine de $\mathbb{R}^2$ est donc **verticalement simple** s'il est compris entre les droites d'équation $x = a$ et $x = b$ et les courbes des fonctions $y = g_1(x)$ et $y = g_2(x)$. Même chose en échangeant x et y pour "horizontalement simple".

Intégrer sur des domaines verticalement simples

Théorème (Théorème de Fubini, version faible)

Soit $A \subset \mathbb{R}^2$ et $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ continue et bornée.

- Si $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ t.q. } x \in [a, b], g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$ est verticalement simple, alors

$$\iint_A f(x, y) dx dy = \int_a^b \left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy \right) dx.$$

1^{re} ite d'une fct de 1 variable y avec x gèle

2^e ite d'une fct de 1 var x.

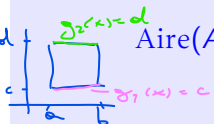
- Si $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ t.q. } y \in [c, d], h_1(y) \leq x \leq h_2(y)\}$ est horizontalement simple, alors

$$\iint_A f(x, y) dx dy = \int_c^d \left(\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y) dx \right) dy.$$

Dans le cas d'un domaine verticalement simple on calcule donc d'abord l'intégrale en la variable y , en considérant que x est une constante. Le résultat est une fonction de x qu'on l'intègre alors pour x allant de a à b pour trouver $\iint_A f(x, y) dx dy$.

Exemple

- On retrouve l'aire d'un rectangle $A = [a, b] \times [c, d]$: c'est un domaine verticalement (et horizontalement!) simple et donc



$$\begin{aligned} \text{Aire}(A) &= \iint_A 1 \, dx \, dy = \int_a^b \left(\int_c^d 1 \, dy \right) dx = \int_a^b [y]_c^d dx = \int_a^b (d-c) dx \\ &= [(d-c)x]_a^b = (b-a)(d-c). \end{aligned}$$

- Si $f(x, y) = x^2 y^2$, son intégrale sur $[-1, 1] \times [-1, 1]$ (qui est horizontalement simple) est donnée par:

Verticalement simple

$$\begin{aligned} \iint_A f(x, y) \, dx \, dy &= \int_{-1}^1 \left(\int_{-1}^1 x^2 y^2 \, dy \right) dx = \int_{-1}^1 x^2 \left(\int_{-1}^1 y^2 \, dy \right) dx \\ &= \int_{-1}^1 x^2 \left[\frac{y^3}{3} \right]_{-1}^1 dx = \int_{-1}^1 \frac{2}{3} x^2 dx = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{9}. \end{aligned}$$

$$\iint_A f(x, y) \, dx \, dy = \int_{-1}^1 \left(\int_{-1}^1 x^2 y^2 \, dx \right) dy = \dots = \frac{4}{9}$$

Faites attention à l'ordre de dx et dy , qui indique l'ordre d'intégration!

Quand on calcule (par exemple) une intégrale en y , on considère que x est une constante dans $f(x, y)$ (et inversement). S'il y a des facteurs qui dépendent de x on peut donc les sortir de l'intégrale.

Contenu de la section

Comment calculer des intégrales multiples?

Domaines verticalement ou horizontalement simples et théorème de Fubini

Coordonnées polaires sur $\mathbb{R}^2$

Rappel – Définition: Coordonnées polaires



Définition

Soit P un point du plan $\mathbb{R}^2$. Ses **coordonnées polaires** (ρ, θ) sont définies comme suit:

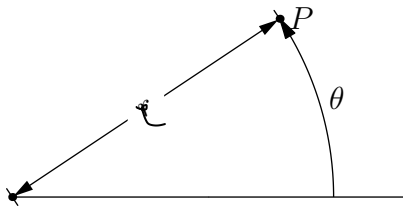
- ▶ ρ est la distance du point P à l'origine: $\rho = \|P - (0,0)\|$
- ▶ θ est l'angle entre la demi-droite OP et l'axe des abscisses.

Dans ce cas ρ est un nombre positif ou nul (il est nul seulement pour l'origine) et θ est un angle qui parcourt $[0, 2\pi[$. Tout point du plan est **uniquement représenté** par un couple (ρ, θ) où

$$\rho \geq 0 \quad \text{et} \quad \theta \in [0, 2\pi[.$$

Rappel – Illustration

Dans le cours de géométrie nous avons noté les coordonnées polaires (ρ, θ) :



Les deux notations (r, θ) ou (ρ, θ) sont valables et décrivent les coordonnées polaires. La relation entre coordonnées cartésiennes (x, y) et polaires (ρ, θ) est la suivante:

$$x = \rho \cos(\theta) \quad y = \rho \sin(\theta).$$

On a alors:

$$\rho^2 = x^2 + y^2.$$

Intégrales doubles en coordonnées polaires

L'intérêt des coordonnées polaires est de calculer plus facilement de nombreuses intégrales.

Soit $A \subset \mathbb{R}^2$ un ensemble. Lorsque les coordonnées (x, y) décrivent les points de A , on note $B \subset [0, +\infty[\times [0, 2\pi[$ l'ensemble décrit par les coordonnées polaires (ρ, θ) des points de A .

Résultat

Soit $f : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et bornée. Alors:

$$\iint_A f(x, y) dx dy = \iint_B f(\rho \cos(\theta), \rho \sin(\theta)) \rho d\rho d\theta,$$

Attention

Autrement dit: pour calculer une intégrale en coordonnées polaires, on:

1. remplace x et y par $\rho \cos(\theta)$ et $\rho \sin(\theta)$,
2. remplace le domaine d'intégration par B , et
3. on remplace $dx dy$ par $\rho d\rho d\theta$.

Attention à ne pas oublier le ρ en plus dans $\rho d\rho d\theta$!

Application: calcul du volume de la boule unité de $\mathbb{R}^3$ 

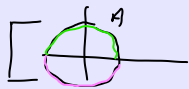
$$\{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$$

Exemple

Soit $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ t.q. } x^2 + y^2 \leq 1\}$ le disque fermé unité dans $\mathbb{R}^2$.

Soit f la fonction:

$$f: A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}.$$



$$\begin{aligned} g_z(x) &= \sqrt{1 - x^2} \\ g_1(x) &= -\sqrt{1 - x^2} \end{aligned} \quad A \text{ est verticalement simple.}$$

La région comprise entre le graphe de f et le plan $\{z = 0\}$ est la demi-boule supérieure et son volume vaut $\iint_A f(x, y) dx dy$.

ex: Calculer $\iint_A f(x, y) dx dy = \int_{-1}^1 \left(\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy \right) dx$
 en verticalement simple.

Alors $2 \iint_A f(x, y) dx dy$ est le volume de la boule de centre 0 et de rayon 1.

Exemple (Suite)

A est un disque de centre $(0,0)$ et de rayon 1: les coordonnées polaires (ρ, θ) de ses points décrivent donc l'ensemble $0 \leq \rho \leq 1$ et $\theta \in [0, 2\pi[$.

Comme $x^2 + y^2 = \rho^2$ on écrit alors:



$$\begin{aligned}
 2 \iint_A f(x,y) dx dy &= 2 \iint_{[0,1] \times [0,2\pi[} \sqrt{1-\rho^2} \rho d\rho d\theta \\
 &= 2 \int_0^1 \rho \sqrt{1-\rho^2} \left(\int_0^{2\pi} d\theta \right) d\rho \\
 &= 4\pi \int_0^1 \rho \sqrt{1-\rho^2} d\rho.
 \end{aligned}$$

$[0, 2\pi]$

Exemple (Suite)

Le volume de la boule unité vaut donc:

$$V = 4\pi \int_0^1 \rho \sqrt{1 - \rho^2} d\rho.$$

Cette intégrale se calcule en posant $\rho = \sin(t)$, avec $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Alors $d\rho = \cos(t) dt$, et comme $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $\sqrt{1 - \rho^2} = \cos(t)$. Ainsi:

$$\int_0^1 \rho \sqrt{1 - \rho^2} d\rho = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t) \cos^2(t) dt = -\frac{1}{3} [\cos^3(t)]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{3}$$

Pour la dernière intégrale, on peut soit remarquer que $(\frac{1}{3} \cos^3(t))' = -\sin(t) \cos^2(t)$ soit faire le changement de variable $u = \cos(t)$.

Le volume de la boule unité est donc en fin de comptes:

$$V = \frac{4\pi}{3}.$$

Remarque

Dans le calcul précédent, nous avons écrit:

$$\iint_{[0,1] \times [0,2\pi[} \sqrt{1-\rho^2} \rho d\rho d\theta = \int_0^1 \rho \sqrt{1-\rho^2} \left(\int_0^{2\pi} d\theta \right) d\rho.$$

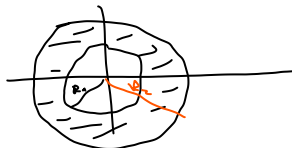
Nous avons encore une fois utilisé le théorème de Fubini sur le domaine $[0,1] \times [0,2\pi[$ qui est **verticalement simple** (car c'est un rectangle).

Dans ce cas encore on peut calculer les intégrales **dans l'ordre qu'on préfère**: on choisit en général toujours celui qui simplifie le calcul.

Nous pouvons toujours utiliser la notion de “verticalement simple” même lorsque les variables s'appellent ρ et θ , et donc **intégrer une variable après l'autre**. Ici l'interprétation géométrique n'est pas la même que pour les coordonnées cartésiennes, donc nous dirons plutôt “simple en la coordonnée ρ ” ou “simple en la coordonnée θ ”.

Encore un exemple

A



Soient $0 < R_1 < R_2$. On va montrer que

$$\iint_A \frac{1}{x^2 + y^2} dx dy = 2\pi \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$$

$$\|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

où $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tels que } R_1 \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq R_2\}$ est la couronne centrée en 0 comprise entre les rayons R_1 et R_2 .

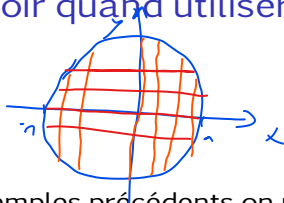
Par définition, les coordonnées polaires des points de A vérifient:

$$R_1 \leq \rho \leq R_2 \quad \text{et} \quad \theta \in [0, 2\pi[.$$

En écrivant l'intégrale en coordonnées polaires il vient donc:

$$\begin{aligned} \iint_A \frac{1}{x^2 + y^2} dx dy &= \iint_{\rho \in [R_1, R_2], \theta \in [0, 2\pi[} \frac{1}{\rho^2} \rho d\rho d\theta = \int_0^{2\pi} \left(\int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{\rho} d\rho \right) d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} (\ln(R_2) - \ln(R_1)) d\theta = 2\pi \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right). \end{aligned}$$

Comment savoir quand utiliser les coordonnées polaires?



Dans les deux exemples précédents on pouvait le deviner car l'expression $x^2 + y^2$ apparaissait dans la fonction à intégrer. On pense alors dans ce cas à la remplacer par $\rho^2 = x^2 + y^2$ ce qui fait naturellement apparaître des coordonnées polaires.

On peut aussi penser aux coordonnées polaires dans le cas où l'ensemble d'intégration **s'exprime facilement en ces coordonnées**. C'était le cas du disque de centre 0 et de rayon 1 (représenté par $0 \leq \rho \leq 1$ et $\theta \in [0, 2\pi[$) et de la couronne.

