

# Intégrales multiples 2

(Syllabus Chapitre XVII, parties 5 à la fin)

# Contenu de la section

Propriétés des intégrales multiples

# Propriétés

## Théorème

Si  $A \subset \mathbb{R}^2$  est un domaine borné, et  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  est continue et bornée, alors  $f$  est intégrable et  $\iint_A f(x,y) dx dy$  existe.

# Propriétés

Comme dans le cas des fonctions d'une variable, nous avons des propriétés d'additivité :

## Résultat

Si  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  et  $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$  alors

$$\iint_A (\alpha f + \beta g) = \alpha \iint_A f + \beta \iint_A g.$$

Si  $A, B \subset \mathbb{R}^2$  sont des ensembles bornés, et  $A \cap B = \emptyset$ , alors

$$\iint_{A \cup B} f = \iint_A f + \iint_B f.$$



Attention, si  $A$  et  $B$  ont une intersection non vide, ceci n'est plus vrai!

## Contenu de la section

Changements de coordonnées pour calculer des intégrales

## Contenu de la section

Changements de coordonnées pour calculer des intégrales

Coordonnées polaires – Rappel

Coordonnées quelconques; le cadre théorique

## Rappel

Soit  $A \subset \mathbb{R}^2$  un ensemble. On note  $B \subset [0, +\infty[ \times [0, 2\pi[$  l'ensemble des valeurs prises par les coordonnées polaires  $(\rho, \theta)$  des points de  $A$ .

### Résultat

Soit  $f : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction intégrable (par exemple, continue et bornée sur  $A$ ). Alors:

$$\iint_A f(x, y) \, dx \, dy = \iint_B f(\rho \cos(\theta), \rho \sin(\theta)) \, \rho \, d\rho \, d\theta.$$

Cette propriété permet de calculer des intégrales en les écrivant **en coordonnées polaires**.

Dans un changement de coordonnées il faut: ne pas oublier le  $\rho$  dans l'élément de surface  $\rho \, d\rho \, d\theta$ , changer le domaine d'intégration en  $B$  et changer  $x$  et  $y$  en  $\rho \cos(\theta)$  et  $\rho \sin(\theta)$ .

## Contenu de la section

### Changements de coordonnées pour calculer des intégrales

Coordonnées polaires – Rappel

Coordonnées quelconques; le cadre théorique

# Systèmes de coordonnées

Rappelons qu'un *système de coordonnées* sur une partie du plan est une **bijection** entre ce sous-ensemble et une partie de  $\mathbb{R}^2$ .

“Bijection” signifie que tout point du plan est **uniquement** représenté par un couple de nombres dans  $\mathbb{R}^2$ .

En présence de *deux* (ou plusieurs) systèmes de coordonnées, chaque point du plan possède donc deux (ou plusieurs) paires de coordonnées.

## Exemple

Le point du plan représenté par  $(x, y) = (-1, 0)$  en **coordonnées cartésiennes** est aussi représenté par  $(\rho, \theta) = (1, \pi)$  en **coordonnées polaires**.

## Changement de coordonnées

On note  $(u, v)$  des coordonnées quelconques (par exemple polaires), à valeur dans une partie  $B$  du plan.

Le passage de  $(u, v)$  aux coordonnées cartésiennes  $(x, y)$  fournit une **bijection**. Elle est appelée **changement de coordonnées**.

Ceci signifie qu'on peut écrire les coordonnées cartésiennes  $(x, y) = F(u, v)$  où  $F$  est une fonction de  $B \subset \mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}^2$ . Ainsi:

$$(x, y) = F(u, v) = (F_1(u, v), F_2(u, v)).$$

Ici  $F_1, F_2 : B \rightarrow \mathbb{R}$  sont les fonctions donnant respectivement  $x$  et  $y$  en fonction de  $u$  et  $v$ :

$$x = F_1(u, v) \quad \text{et} \quad y = F_2(u, v).$$

$$(\text{coord polaire } (u, v) = (r, \theta) \rightsquigarrow x = r \cos \theta \text{ et } y = r \sin(\theta))$$

# Changement de coordonnées

## Exemple (Coordonnées polaires)

Elles sont définies pour  $(\rho, \theta) \in B = ]0, +\infty[ \times [0, 2\pi[$ .

Comme  $x = \rho \cos(\theta)$  et  $y = \rho \sin(\theta)$ , la fonction

$F : (\rho, \theta) \in ]0, +\infty[ \times [0, 2\pi[ \rightarrow \mathbb{R}^2$  est:

$$F(\rho, \theta) = (\rho \cos(\theta), \rho \sin(\theta)) = (\text{ }, \text{ }).$$

# Changement de variables dans une intégrale

## Résultat

Soit  $A \subset \mathbb{R}^2$ . On suppose que tout point de  $A$  a des coordonnées  $(u, v)$  (autres que les cartésiennes) dont les valeurs décrivent **un ensemble**  $B$  quand  $(x, y)$  décrit  $A$ . On note

$$(x, y) = F(u, v) = \left( \begin{array}{c} \phantom{x} \\ \phantom{y} \end{array} \right)$$

le changement de coordonnées.

Soit  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  continue. Alors l'intégrale de  $f$  sur  $A$  se calcule comme:

$$\iint_A f(x, y) dx dy = \iint_B f\left( \begin{array}{c} \phantom{x} \\ \phantom{y} \end{array} \right) \phantom{dx dy} du dv.$$

Dans cette formule,  $|\det \text{Jac } F_{(u,v)}|$  désigne la valeur absolue du déterminant de la matrice Jacobienne (la matrice des dérivées partielles de  $F$ ). Il faut donc **remplacer**  $x$  par  $F_1(u, v)$ ,  $y$  par  $F_2(u, v)$ ,  $A$  par  $B$  et  $dx dy$  par  $|\det \text{Jac } F_{(u,v)}| du dv$ .

## Exemple (Coordonnées polaires dans $\mathbb{R}^2$ )

Pour les coordonnées polaires le changement de coordonnées est

$F : ]0, +\infty[ \times [0, 2\pi[ \rightarrow \mathbb{R}^2$  donné par

$$F(\rho, \theta) = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \iff F_1(\rho, \theta) = \rho \cos \theta, \quad F_2(\rho, \theta) = \rho \sin \theta.$$

Alors:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_1}{\partial \rho} &= \cos \theta & \frac{\partial F_1}{\partial \theta} &= -\rho \sin \theta \\ \frac{\partial F_2}{\partial \rho} &= \sin \theta & \frac{\partial F_2}{\partial \theta} &= \rho \cos \theta \end{aligned}$$

La matrice Jacobienne est ainsi donnée par:

$$\text{Jac } F_{(\rho, \theta)} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\rho \sin \theta \\ \sin \theta & \rho \cos \theta \end{pmatrix}$$

dont la valeur absolue du déterminant est:

$$|\det \text{Jac } F_{(\rho, \theta)}| = |\cos(\theta) \cdot \rho \cos(\theta) - (-\rho \sin(\theta)) \cdot \sin(\theta)| = \rho$$

Ceci explique pourquoi on a  $\rho d\rho d\theta$  dans la formule:

$$\iint_A f(x, y) dx dy = \iint_B f(\rho \cos(\theta), \rho \sin(\theta)) \rho d\rho d\theta.$$

## Remarques

- ▶ En faisant le changement de variables n'oubliez pas de changer le  $dx dy$  en  $|J| du dv$  des nouvelles coordonnées
- ▶ Ici,  $F : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  est une application de deux variables à valeurs dans  $\mathbb{R}^2$ , car nous parlons de coordonnées sur le plan. La même formule de changement de variables reste encore vraie pour des coordonnées dans ce cas  $F$  devient une application  $F : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , et le déterminant est celui d'une matrice de taille  $n \times n$  ( $n$  lignes et  $n$  colonnes).
- ▶  $|\det \text{Jac} F_{(u,v)}|$  a une interprétation géométrique: un très petit rectangle de côtés  $dx$  et  $dy$ , donc d'aire  $dx dy$  en coordonnées  $(x, y)$  se transforme en un  $|J| du dv$  d'aire en coordonnées  $(u, v)$ .

# Contenu de la section

Intégrales triples

# Intégrales triples

Tout ce que nous venons de voir s'adapte en dimensions plus grandes. Soit  $f$  une fonction définie sur une partie  $A$  de l'espace  $\mathbb{R}^3$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ . Par analogie avec l'intégrale double, l'intégrale triple

$$\iiint_A f(x,y,z) dx dy dz$$

représente "le volume algébrique sous le graphe de  $f$ ".

C'est-à-dire le volume d'un ensemble de , qui n'est donc pas représentable graphiquement.

En revanche, dans le cas particulier  $f(x,y,z) \equiv 1$ , comme pour les intégrales doubles,

$$\iiint_A dx dy dz$$

est la valeur du volume de l'ensemble des points de l'espace  $\mathbb{R}^3$  dont les coordonnées cartésiennes sont dans  $A$ . Calculer des intégrales triples permet donc de calculer des volumes.

# Contenu de la section

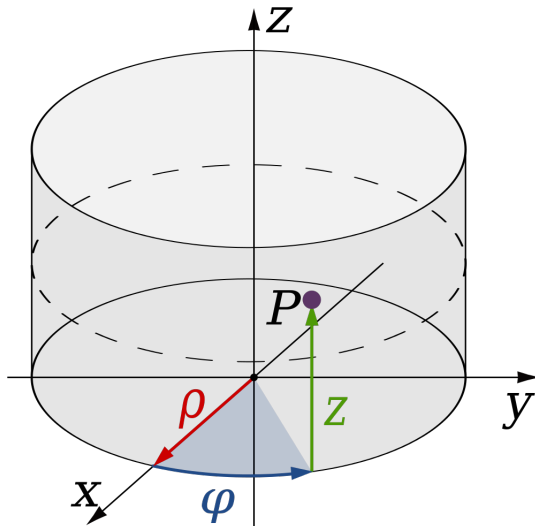
Intégrales triples

Coordonnées cylindriques

Coordonnées sphériques

# Illustration des coordonnées cylindriques

L'angle  $\theta$  est dans le dessin suivant noté  $\varphi$ :



## Coordonnées cylindriques sur $\mathbb{R}^3$

Ces coordonnées sont obtenues en gardant la hauteur  $z$  intacte et **en utilisant des coordonnées polaires dans le plan  $(x, y)$** . L'application de changement de coordonnées est donc:

$$F : ]0, +\infty[ \times [0, 2\pi[ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$F(\rho, \theta, z) =$$

Ou encore:

$$x = \rho \cos(\theta), \quad y = \rho \sin(\theta), \quad z = z.$$

Le calcul de la matrice Jacobienne est alors le même que pour les coordonnées polaires, et on trouve  $|\det \text{Jac } F_{(\rho, \theta, z)}| =$  Ainsi:

$$\iiint_A f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \iiint_{F^{-1}(A)} f( \quad )$$

Ici  $F^{-1}(A)$  désigne l'ensemble des valeurs prises par  $(\rho, \theta, z)$  lorsque  $(x, y, z)$  parcourent  $A$ . Pour calculer cette intégrale, le théorème de Fubini s'applique encore: **on peut toujours intégrer une variable après l'autre.**

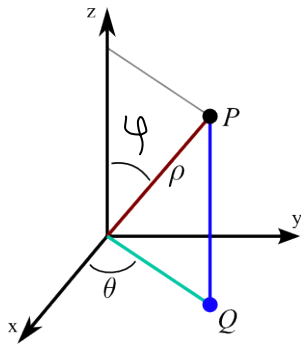
# Contenu de la section

## Intégrales triples

Coordonnées cylindriques

Coordonnées sphériques

# Coordonnées sphériques 1



C'est un autre changement de coordonnées très utile dans l'espace  $\mathbb{R}^3$ . On repère maintenant les points de  $\mathbb{R}^3$  par leur distance à l'origine  $\rho$  et deux angles  $\varphi$  et  $\theta$ .

$\rho$  représente la distance (dans  $\mathbb{R}^3$ ) entre le point  $P$  et l'origine  $O$ :

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

$\varphi$  désigne l'angle entre la droite  $(OP)$  et l'axe vertical  $(Oz)$ :

$$z =$$

$\theta$  désigne l'angle entre la projection de  $P$  dans le plan  $Oxy$  et l'axe  $(Ox)$ :

$$x =$$

$$y =$$

## Coordonnées sphériques 2

Les **coordonnées sphériques** sur  $\mathbb{R}^3$  sont dès lors définies par l'application de changement de coordonnées suivante:

$$F : \begin{cases} ]0, +\infty[ \times ]0, 2\pi] \times [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^3 : \\ (\rho, \theta, \varphi) \mapsto (\rho \cos(\theta) \sin(\varphi), \rho \sin(\theta) \sin(\varphi), \rho \cos \varphi) \end{cases}$$

Ici,  $\theta$  est parfois nommée **longitude** et  $\varphi$  est alors la

En coordonnées sphériques:

$$(x, y, z) = F(\rho, \theta, \varphi) = (\rho \cos(\theta) \sin(\varphi), \rho \sin(\theta) \sin(\varphi), \rho \cos \varphi).$$

Nous allons calculer  $|\det \text{Jac } F(\rho, \theta, \varphi)|$ . Par définition:

$$\text{Jac } F(\rho, \theta, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) \sin(\varphi) & \sin(\theta) \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \\ -\rho \sin(\theta) \sin(\varphi) & \rho \cos(\theta) \sin(\varphi) & -\rho \sin(\theta) \cos(\varphi) \\ \rho \cos(\theta) \cos(\varphi) & \rho \sin(\theta) \cos(\varphi) & -\rho \cos(\varphi) \end{pmatrix}.$$

En développant par rapport à la dernière ligne on trouve:

$$\begin{aligned} |\det \text{Jac } F| &= \left| \cos(\varphi) \begin{vmatrix} -\rho \sin(\theta) \sin(\varphi) & \rho \cos(\theta) \cos(\varphi) \\ \rho \cos(\theta) \sin(\varphi) & \rho \sin(\theta) \cos(\varphi) \end{vmatrix} + 0 \right. \\ &\quad \left. + (-\rho \sin(\varphi)) \begin{vmatrix} \cos(\theta) \sin(\varphi) & -\rho \sin(\theta) \sin(\varphi) \\ \sin(\theta) \sin(\varphi) & \rho \cos(\theta) \sin(\varphi) \end{vmatrix} \right| \\ &= \left| \cos(\varphi) \left( -\rho^2 \cos(\varphi) \sin(\varphi) \right) + (-\rho \sin(\varphi)) \rho \sin(\varphi)^2 \right| \\ &= \left| -\rho^2 \sin(\varphi) (\cos(\varphi)^2 + \sin(\varphi)^2) \right| = \end{aligned}$$

# Formule de changement de variables en coordonnées sphériques

Nous venons de voir que  $|\det \text{Jac } F| = \rho^2 \sin(\varphi)$ . Soit  $f$  une fonction  $f : A \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ . On désigne par  $B$  l'ensemble des valeurs prises par les coordonnées sphériques sur  $A$ . La formule de changement de variables devient donc:

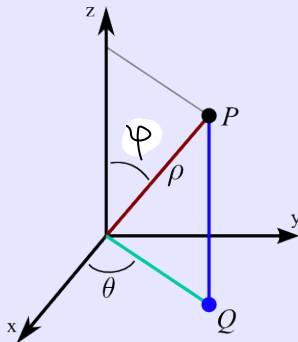
$$\iiint_A f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \iiint_B f(\rho, \varphi, \theta) \, \rho^2 \sin(\varphi) \, d\rho \, d\varphi \, d\theta$$

Dans le cas particulier où  $f(x, y, z) = 1$  pour tout  $(x, y, z) \in A$ , cette intégrale est le volume de l'ensemble  $A$ .

## Exemple (Volume de la boule dans $\mathbb{R}^3$ )

La boule de centre 0 et de rayon 1 est  $A = \{(x, y, z), x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$ .  
Alors les variables des coordonnées sphériques vérifient:

$$0 \leq \rho \leq 1, \quad 0 \leq \theta < 2\pi, \quad 0 < \varphi < \pi.$$



## Exemple (Volume de la boule dans $\mathbb{R}^3$ , suite)

On note alors  $B = [0, 1] \times [0, 2\pi[ \times ]0, \pi[$ . Par un changement de coordonnées sphérique, le volume de la boule vaut:

$$\begin{aligned}\iiint_A 1 \, dx \, dy \, dz &= \iiint \rho^2 \sin \varphi \, d\varphi \, d\theta \, d\rho \\ &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \rho^2 \sin \varphi \, d\varphi \, d\theta \, d\rho \\ &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \rho^2 [-\cos \varphi]_0^\pi \, d\theta \, d\rho \\ &= 2 \int_0^1 \int_0^{2\pi} \rho^2 \, d\theta \, d\rho \\ &= 4\pi \int_0^1 \rho^2 \, d\rho = \frac{4}{3}\pi.\end{aligned}$$