

MATH. F-117/118/119 Devenir cours théorique

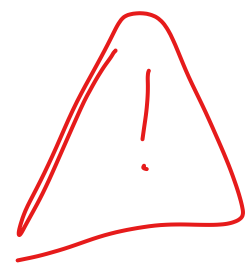
 Les TPs et TPs ex cath continuent

Examen en juin: 117:
 — Interne $\rightsquigarrow$ 4 pts
 — Janvier Q1 $\rightsquigarrow$ 8 pts
 — Juin Q2 $\rightsquigarrow$ 8 pts

118/119:
 — Janvier Q1 $\rightsquigarrow$ 12 pts
 — Juin Q2 $\rightsquigarrow$ 8 pts

Équations différentielles Ordinaires 3

(Syllabus Chapitre XVIII, parties 3.1 et 3.2)



- Si on repasse un examen, la note précédente est perdue!
- Ce cours est le même que MATH-F-112 (l'an passé)
 - $\hookrightarrow$ Si vous avez déjà réussi une des parties de 112, cette réussite est reprise cette année.

Contenu de la section

Équations linéaires du second ordre à coefficients constants (suite)

Rappels

Définition

Une *équation linéaire* du second ordre à *coefficients constants* est une équation de la forme :

$$ay'' + by' + cy = f(x)$$

pour certaines *constantes* a, b, c et une fonction donnée f .

Définition

L'équation linéaire *homogène* associée (ÉLHA) est l'équation où on a choisi $f \equiv 0$:

$$ay'' + by' + cy = 0.$$

Le *polynôme caractéristique* de l'équation homogène est:

$$a\lambda^2 + b\lambda + c$$

Méthode de résolution de $ay'' + by' + c = f(x)$, $a, b, c \in \mathbb{R}$ $\downarrow$ CI

La résolution d'une telle équation se fait en quatre étapes:

1. Résolution de l'équation linéaire **homogène** associée (ÉLHA):

$$y_{SGEH}(x) = C_1 g_1(x) + C_2 g_2(x),$$

← famille de solutions

où la forme de g_1 et g_2 dépend **du discriminant du polynôme caractéristique**. (Nous avons vu cette étape au dernier cours).

2. Trouver une solution particulière $y_{SPEL}(x)$ de l'équation linéaire.

3. Écrire la solution générale de l'équation linéaire (EL) comme:

*Globalisation des
pts 1. et 2.*

$$y(x) = y_{SGEH}(x) + y_{SPEL}(x).$$

← famille de solutions

4. Si des conditions initiales sont présentes, les prendre en compte pour déterminer les valeurs de C_1 et C_2 .

→ Les CI permettent de faire un choix dans les familles de solutions.

On commence par donner un exemple de résolution d'une équation **homogène** ($f = 0$), où les étapes 2 et 3 peuvent être sautées.

On verra ensuite plusieurs méthodes **pour effectuer l'étape 2** et trouver des solutions particulières en fonction de la forme de f .

Exemple

Réolvons le problème de Cauchy $y(0)=1, y'(0)=0$ $\left\{ \begin{array}{l} 2 \text{ notations} \\ \text{équivalentes} \end{array} \right.$
 $y'' - 3y' + 2y = 0, \quad x_0 = 0, \quad y_0 = 1, \quad y'_0 = 0.$

Cette équation linéaire est déjà homogène, donc il n'y a que les étapes 1 et 4 à considérer.

Étape 1: le polynôme caractéristique est $\lambda^2 - 3\lambda + 2$; ses racines sont 2 et 1. Ceci nous place dans le cas 1 du théorème, et donc la solution générale est :

$$y(x) = C_1 \exp(2x) + C_2 \exp(x).$$

Étape 4: prendre en compte les conditions initiales. Par définition la solution cherchée vérifie $y(x_0) = y_0$ et $y'(x_0) = y'_0$ soit

$$\begin{cases} y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 \exp(2 \cdot 0) + C_2 \exp(0) = 1 \\ 2C_1 + C_2 = 0 \end{cases} \begin{array}{l} \text{c'est-à-dire} \\ \end{array} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 + C_2 = 1 \\ 2C_1 + C_2 = 0 \end{cases}$$

dont on tire $C_1 = -1$ et $C_2 = 2$. La solution du problème de Cauchy est donc :

$$y(x) = -\exp(2x) + 2\exp(x).$$

$$y'(x) = 2C_1 \exp(2x) + C_2 \exp(x) \leadsto y'(0) = 2C_1 + C_2$$

Contenu de la section

Équations linéaires du second ordre à coefficients constants (suite)

Étape 2 pour les équations du second ordre: déterminer une solution particulière de l'équation non-homogène à partir de la forme du second membre f

Déterminer une solution particulière

Comme dans le cas des équations du premier ordre, il faut trouver une solution particulière y_{SPEL} de l'équation linéaire (EL) de départ.

Mais contrairement aux équations du premier ordre la méthode de variation de la constante ne s'applique plus.

On va expliquer comment deviner la solution particulière à partir de la forme du second membre dans les cas où la fonction f est:

- ▶ un polynôme
- ▶ une somme de fonctions exponentielles
- ▶ une somme de fonctions trigonométriques

Il arrive aussi (rarement) qu'une solution soit facile à identifier; c'est en général le cas pour les solutions constantes.

Exemple

L'équation linéaire du second ordre:

$$y'' + 3y' + y = 1$$

admet $y \equiv 1$ comme solution particulière.

Équations linéaires du second ordre à coefficients constants (suite)

Étape 2 pour les équations du second ordre: déterminer une solution particulière de l'équation non-homogène à partir de la forme du second membre f

Polynômes

Exponentielles

Fonctions Trigonométriques

Second membre polynomial

Résultat

Soit l'équation:

$$ay'' + by' + cy = f.$$

Si f est un polynôme de degré n , on cherchera y_{SPEL} sous la forme d'un polynôme :

- ▶ de degré n si $c \neq 0$
- ▶ de degré $n+1$ si $c = 0$ et $b \neq 0$ → y n'intervient pas car $c=0$ et y' de degré n .
- ▶ de degré $n+2$ si $c = 0, b = 0$ et $a \neq 0$.

Dans le cas où (par exemple) $b = c = 0$, l'équation devient juste

$$ay'' = f.$$

Il est donc normal de chercher y comme un polynôme de degré $n+2$, puisque la dérivée seconde d'un polynôme de degré $n+2$ est un polynôme de degré n .

Exemple

Soit l'équation

$$y'' + y' + \underbrace{2}_{\neq 0} y = \underbrace{x^2}_{\text{polynôme de degré 2.}}$$

On va trouver une solution particulière qui est un polynôme de degré 2. On cherche donc trois nombres réels p, q, r pour que:

$y(x) = px^2 + qx + r$ soit solution de l'équation. On calcule alors:

$$\begin{aligned} \underbrace{y''}_{\text{}} + \underbrace{y'}_{\text{}} + \underbrace{2y}_{\text{}} &= \underbrace{2p}_{\text{}} + \underbrace{(2px + q)}_{\text{}} + \underbrace{2(px^2 + qx + r)}_{\text{}} \\ &= 2px^2 + (2q + 2p)x + 2p + q + 2r \end{aligned}$$

Cette fonction y vérifie l'équation si et seulement si:

$$2px^2 + (2q + 2p)x + 2p + q + 2r = \overbrace{1x^2}^{+0 \cdot x + 0} \iff \begin{cases} 2p = 1 \\ 2q + 2p = 0 \\ 2p + q + 2r = 0 \end{cases}$$

égalité de 2 poly.

On trouve donc $p = -q = \frac{1}{2}$ et $r = -\frac{1}{4}$ et la solution particulière est:

$$y(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}.$$

Équations linéaires du second ordre à coefficients constants (suite)

Étape 2 pour les équations du second ordre: déterminer une solution particulière de l'équation non-homogène à partir de la forme du second membre f

Polynômes

Exponentielles

Fonctions Trigonométriques

Second membre en exponentielles

Le polynôme caractéristique rentre cette fois en jeu:

Résultat

On considère l'équation

$$ay'' + by' + cy = f$$

et son polynôme caractéristique $a\lambda^2 + b\lambda + c$. Si f a la forme

$$f(x) = A \exp(kx), = Ae^{kx}$$

pour des constantes A et k , alors on cherchera y_{SPEL} de la forme :

- ▶ $\beta \exp(kx)$, si k n'est pas racine du polynôme caractéristique
- ▶ $\beta x \exp(kx)$, si k est racine simple du polynôme caractéristique
- ▶ $\beta x^2 \exp(kx)$, si k est racine double du polynôme caractéristique.

$\exp(kx)$
n'est plus
disponible

Dans ces trois exemples β est un nombre réel à déterminer.

On dit que λ_0 est:

- ▶ racine simple d'un polynôme P si $P(\lambda_0) = 0$ mais $P'(\lambda_0) \neq 0$
- ▶ racine double de P si $P(\lambda_0) = P'(\lambda_0) = 0$.

Exemple

Soit l'équation

$$y'' - 3y' + 2y = \boxed{e^x}.$$

$\rightarrow A \exp(kx)$ avec $A=1$
 $k=1$

Nous allons trouver une solution particulière avec la règle précédente. Le polynôme caractéristique est $P(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda + 2$ dont les racines sont 1 et 2. Ici $e^x = e^{1 \cdot x}$, et 1 est **racine simple de P** . Par le critère précédent on cherche donc une solution sous la forme

$$y(x) = \beta x e^x$$

pour un $\beta \in \mathbb{R}$ à déterminer. On a alors: $y'(x) = \beta(1 + x)e^x$,
 $y''(x) = \beta(2 + x)e^x$ et:

$$y'' - 3y' + 2y = \beta \left((2 + x)e^x - 3(1 + x)e^x + 2xe^x \right) = -\beta e^x \stackrel{!}{=} e^x$$

On choisira donc $\beta = -1$, ce qui donne la solution particulière:

$$y(x) = -x e^x.$$

Équations linéaires du second ordre à coefficients constants (suite)

Étape 2 pour les équations du second ordre: déterminer une solution particulière de l'équation non-homogène à partir de la forme du second membre f

Polynômes

Exponentielles

Fonctions Trigonométriques

Second membre en fonctions trigonométriques

On considère l'équation

$$ay'' + by' + cy = f$$

et son polynôme caractéristique $a\lambda^2 + b\lambda + c$. On rappelle la grandeur

$$\omega = \frac{1}{2a} \sqrt{4ac - b^2}$$

$\Delta = b^2 - 4ac$
lorsque $\Delta \leq 0$

qui intervient dans la résolution de l'équation homogène.

Résultat

On suppose que $f(x) = A \cos(kx) + B \sin(kx)$ pour certaines constantes

A, B, k . Alors:
données.

► Si $b^2 - 4ac > 0$, on cherchera y_{SPEL} sous la forme

$$\Delta > 0$$

$$y_{SPEL} = \alpha \cos(kx) + \beta \sin(kx).$$

► Si $b^2 - 4ac \leq 0$, et si $k = \omega$, on cherchera y_{SPEL} sous la forme

$$\Delta \leq 0$$

$$y_{SPEL} = x \left(\alpha \cos(kx) + \beta \sin(kx) \right).$$

Dans ces exemples α et β sont des nombres réels à déterminer.

Linéarité des équations

Dans le cas où le second membre f appartient à plusieurs des catégories décrites précédemment, il suffit de pour chaque composante de f .

Exemple

Imaginons que

$$f(x) = \overbrace{\cos(3x)}^{\text{trigo}} + \overbrace{x^2 + 1}^{\text{polyn}} + \overbrace{e^{-3x}}^{\text{expo.}}$$

Pour trouver une solution particulière d'une équation du type

$$ay'' + by' + cy = f$$

il suffit d'appliquer trois fois séparément les critères qu'on vient de voir: respectivement à $\cos(3x)$, $x^2 + 1$ et e^{-3x} . Ceci donne trois solutions différentes, et la solution cherchée pour f est la somme de ces trois solutions.

Contenu de la section

Exemples de résolution d'équations d'ordre 2

Un exemple

Nous considérons l'ÉDO linéaire du second ordre à coefficients constants suivante :

$$y'' - 9y = x + \exp(2x) + \exp(3x).$$

pas de C.I.
→ pas étape 4.

Le problème de Cauchy n'est pas précisé ici, donc on procède à sa résolution en suivant les étapes 1 à 3.

Étape 1: Le polynôme caractéristique de l'équation est $\lambda^2 - 9$, qui a deux racines distinctes, 3 et -3. Ceci qui nous place dans le cas 1 du théorème. Dès lors la solution générale de l'équation homogène $y'' - 9y = 0$ est donnée par :

$$y_{SGEH}(x) = C_1 \exp(3x) + C_2 \exp(-3x)$$

où C_1 et C_2 sont des constantes réelles.

Étape 2: le second membre est **une somme** de plusieurs termes:

$y'' - 9y = ?$

$$y'' - 9y = \underbrace{x}_{\text{poly}} + \underbrace{\exp(2x)}_{\text{exp}} + \underbrace{\exp(3x)}_{\text{exp}}.$$

Dans cette situation, nous allons :

- ▶ appliquer **à chaque terme** la méthode correspondante pour trouver une solution, et
- ▶ faire la somme des solutions particulières.

Faisons cela:

- ▶ le terme x , est un polynôme **de degré 1**. La méthode indique donc de chercher une solution sous forme d'un polynôme de degré 1, c'est-à-dire de la forme $\alpha x + \beta$; $\leftarrow \text{car } C \neq 0$.
- ▶ le terme $\exp(2x)$ est une exponentielle et 2 **n'est pas racine du polynôme caractéristique**. Il faut donc chercher une solution de la forme $\gamma \exp(2x)$;
- ▶ le terme $\exp(3x)$ est une exponentielle et 3 **est racine simple du polynôme caractéristique**. Il faut donc chercher une solution de la forme $\phi x \exp(3x)$.

Ici $\alpha, \beta, \gamma, \phi$ sont 4 constantes réelles à déterminer.

Nous cherchons donc une solution particulière qui a la forme suivante :

$$y_{SPEL}(x) = (\alpha x + \beta) + \gamma \exp(2x) + \phi x \exp(3x). \quad \left(\begin{array}{l} \text{Candidate} \\ y_{SPEL} \end{array} \right)$$

Pour faire ça, nous imposons que cette fonction soit solution de l'équation linéaire de départ:

$$y'' - 9y = x + \exp(2x) + \exp(3x).$$

Pour cela nous calculons:

$$y_{SPEL}''(x) = 0 + 4\gamma \exp(2x) + \phi(6 + 9x) \exp(3x)$$

et insérons cela dans l'équation :

$$\underbrace{4\gamma \exp(2x) + \phi(6 + 9x) \exp(3x)}_{y_{SPEL}''} - 9 \underbrace{\left((\alpha x + \beta) + \gamma \exp(2x) + \phi x \exp(3x) \right)}_{y_{SPEL}} = x + \exp(2x) + \exp(3x)$$

ce qui se simplifie en :

$$\begin{aligned} & \boxed{-9\alpha x - 9\beta} - 5\gamma \exp(2x) + 6\phi \exp(3x) \\ & = \boxed{x} + \exp(2x) + \exp(3x). \end{aligned}$$

Cette équation est donc vérifiée dès que

$$\boxed{\alpha = \frac{-1}{9}, \quad \beta = 0,} \quad \gamma = \frac{-1}{5}, \quad \phi = \frac{1}{6}$$

En remplaçant les valeurs de α, β, γ et ϕ par les valeurs trouvées, la solution particulière est donc:

$$y_{SPEL}(x) = -\frac{1}{9}x - \frac{1}{5}\exp(2x) + \frac{1}{6}x\exp(3x).$$

Étape 3: c'est ici une étape de récapitulation: la solution générale de l'équation linéaire de départ est donc

$$y(x) = \underbrace{C_1 \exp(3x) + C_2 \exp(-3x)}_{y_{SGEN}} + \underbrace{-\frac{1}{9}x - \frac{1}{5}\exp(2x) + \frac{1}{6}x\exp(3x)}_{y_{SPEL}}.$$

Une famille
de solutions
à 2 paramètres

~~Étape 4:~~ elle prend les conditions initiales en compte, mais nous n'en avons donné aucune ici. Les conditions initiales serviraient, sinon, à déterminer les constantes C_1 et C_2 .

Pas d'étape 4 car pas de CI.

Un autre exemple

Nous considérons cette fois l'équation linéaire suivante avec problème de Cauchy :

$$y'' + y = \cos(2x), \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$$

Étape 1: le polynôme caractéristique est $\lambda^2 + 1$. L'équation homogène associée:

$$y'' + y = 0$$

n'a pas de racines réelles et se trouve donc dans le cas 3 du théorème), avec $\rho = 0$ et $\omega = 1$. (Ceci revient à dire que les racines complexes de $\lambda^2 + 1$ sont $\pm i$.) La solution générale de l'ÉLHA est alors :

$$y_{SGEH}(x) = C_1 \cos(x) + C_2 \sin(x)$$

pour des constantes réelles C_1 et C_2 .

Étape 2: on cherche maintenant une solution particulière de

$$y'' + y = \boxed{\cos(2x)} \text{ let trigono.}$$

Le second membre est de la forme $A \cos(kx) + B \sin(kx)$ avec

$$A = 1, \quad B = 0, \quad k = 2.$$

On cherche donc une solution particulière avec la méthode pour un second membre trigonométrique. Comme ici $\omega = 1$ on a $k \neq \omega$ et on cherche une solution particulière de la forme :

$$y_{SPEL} = \alpha \cos(2x) + \beta \sin(2x)$$

avec α et β des réels à déterminer. Imposons que cette fonction soit solution de l'équation linéaire de départ. On calcule alors:

$$y'_{SPEL} = -2\alpha \sin(2x) + 2\beta \cos(2x)$$

$$y''_{SPEL} = -4\alpha \cos(2x) - 4\beta \sin(2x)$$

et on remplace dans l'équation :

$$y''_{SPEL}(x) + y_{SPEL}(x) = \cos(2x) \iff -3\alpha \cos(2x) - 3\beta \sin(2x) = \cos(2x).$$

Ceci est vérifié pour $\alpha = -\frac{1}{3}$ et $\beta = 0$. La solution particulière est donc:

$$y_{SPEL}(x) = \frac{-\cos(2x)}{3}.$$

$+ 0 \sin(2x)$

Étape 3: la solution générale de l'équation linéaire de départ est ainsi

$$y(x) = C_1 \cos(x) + C_2 \sin(x) - \frac{1}{3} \cos(2x).$$

Étape 4: Il reste à utiliser les conditions initiales $y(0) = 1, y'(0) = 0$ pour déterminer les valeurs de C_1 et C_2 . L'expression ci-dessus donne:

$$\begin{cases} y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} C_1 - \frac{1}{3} = 1 \\ C_2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} C_1 = \frac{4}{3} \\ C_2 = 0 \end{cases}$$

La solution cherchée est ainsi:

$$y(x) = \frac{4}{3} \cos(x) - \frac{1}{3} \cos(2x).$$

FIN !