

Combinatoire

(Syllabus Chapitre II, 3.7 à 3.10)

Contenu de la section

Combinatoire

Combinatoire

Dans ce chapitre nous allons décrire des manières plus ou moins élaborées pour compter et dénombrer des objets.

Nous verrons des comptages avec répétition, sans répétition, et des comptages de “tas”.

Contenu de la section

Combinatoire

Puissances et comptage avec répétition

Factorielle et comptage sans répétition

Coefficients binomiaux et comptage de “tas”

Propriétés des coefficients binomiaux

Formule du binôme de Newton

Comptage avec répétition 1

Question

Combien de séquences de 5 lettres peut-on réaliser avec les lettres A, C, G et T ? Les lettres **peuvent se répéter**.

Réponse

Pour la première lettre, il y a 4 choix possibles: A, C, G et T. Pour la deuxième lettre il y a encore 4 choix possibles, ce qui fait $4 \cdot 4 = 16$ choix pour les deux premières lettres. Pour chacune des lettres suivantes il y a encore 4 choix possibles vu qu'on autorise les répétitions. En fin de comptes il y a:

$$4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 4^5 = 1024 \text{ choix possibles.}$$

Comptage avec répétition 2

Question

Combien de séquences de 8 chiffres peut-on réaliser avec les chiffres 0 et 1 ? Les chiffres peuvent se répéter.

Réponse

Pour le premier chiffre il y a 2 choix possibles: 0 et 1. Pour chacun des chiffres suivants il y a encore 2 choix possibles vu qu'on autorise les répétitions. En fin de comptes il y a:

$$2^8 = 256$$

séquences possibles.

Contenu de la section

Combinatoire

Puissances et comptage avec répétition

Factorielle et comptage sans répétition

Coefficients binomiaux et comptage de “tas”

Propriétés des coefficients binomiaux

Formule du binôme de Newton

Un exemple de comptage sans répétition

Question

Combien de séquences de 4 lettres peut-on réaliser avec les lettres A, C, G et T en utilisant une seule fois chaque lettre ?

Réponse

Pour la première lettre, il y a 4 choix possibles: A, C, G et T. Pour la deuxième lettre il n'y a plus que 3 choix possibles: peu importe la valeur choisie pour la première lettre, la deuxième lettre doit être différente de la première. Pour la troisième il ne reste alors plus que 2 choix, et pour la quatrième un seul choix possible.

En fin de comptes il y a:

$$4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$$

choix possibles.

Plus généralement

Question

Soit $n \geq 1$ un entier naturel. On dispose de n lettres différentes. Combien de séquences de n lettres peut-on réaliser en utilisant une seule fois chaque lettre ?

(exemple précédent : $n=4$)

Réponse

Pour la première lettre, il y a n choix possibles. Pour la deuxième il n'y a plus que $n - 1$ choix possibles car la deuxième lettre doit être différente de la première. Pour la troisième il ne reste alors plus que $n - 2$ choix (la troisième doit être différente des deux premières), pour la quatrième il reste $n - 3$ choix, et ainsi de suite... jusqu'à la dernière lettre (la n -ème), pour laquelle il n'y a plus qu'un choix possible.

En fin de comptes il y a :

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 2 \cdot 1.$$

choix possibles.

Factorielle

Définition

La **factorielle** d'un entier naturel $n \geq 1$, notée $n!$, est définie par :

$$n! := n(n-1)(n-2)\cdots 3 \cdot 2 \cdot 1$$

Pour $n = 0$, on définit $0! = 1$.

Exemple

$$0! = 1 \quad 1! = 1 \quad 2! = 1 \times 2 = 2 \quad 3! = 1 \times 2 \times 3 = 6 \quad 4! = 24 \quad \dots$$

Comme nous venons de le voir dans l'exemple précédent, $n!$ décrit le nombre de manières d'arranger n objets distincts à la suite, sans autoriser de répétition. On dit parfois que $n!$ compte le nombre de permutations (ou réarrangements) possibles de n objets.

Propriétés de la factorielle

Résultat

Pour tout $n \geq 1$,

$$n! = n \cdot (n-1)!$$

C'est ce qu'on appelle une **formule de récurrence**: il suffit de connaître la valeur de $(n-1)!$ pour calculer $n!$.

Preuve

$$n! = n(n-1)(n-2)\cdots 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

$$= n[(n-1)(n-2)\cdots 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1]$$

$$= n(n-1)!$$

(définition)

(associativité)

(définition de
factorielle)

Contenu de la section

Combinatoire

Puissances et comptage avec répétition

Factorielle et comptage sans répétition

Coefficients binomiaux et comptage de “tas”

Propriétés des coefficients binomiaux

Formule du binôme de Newton

Comptage de "tas"

Question

Combien de séquences de 2 lettres **différentes** peut-on former avec A, C, T, G ?

Réponse

$$4 \times 3 = 12.$$



4.3 possibilités

Dans l'exemple précédent, l'ordre des lettres compte. Par exemple CA et AC comptent comme deux séquences de deux lettres différentes.

Question

Combien de séquences de 2 lettres différentes peut-on former avec A, C, T, G, **sans tenir compte de l'ordre?** (Donc où CA et AC comptent comme la même séquence).

Réponse

$$4 \times 3/2 = 6.$$

4.3
2!

lettres différentes en tenant compte de l'ordre
on en a compté 2 fois
trop pour rapporter la question

Plus généralement

Question

On dispose de n lettres différentes. Combien de séquences de k lettres différentes peut-on former avec? ($k \leq n$).

Réponse

$$n(n-1)(n-2)\cdots(n-(k-1)) = \frac{n!}{(n-k)!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdots (n-(k-1))}{(n-k) \cdot (n-k-1) \cdots 1}$$

n branches pour lettre 1
 $n-1$ branches pour lettre 2
 $(n-(k-1))$ branches pour la lettre k .

Comptage de tas

On dispose de n lettres différentes. Supposons maintenant qu'on veuille compter les séquences de k lettres différentes ($k \leq n$), mais sans tenir compte de l'ordre. En d'autres termes on veut seulement compter le nombre de "tas" de lettres distinctes. Par exemple GAT et TAG représentent le même "tas" de lettres.

Question

Combien de "tas" de k lettres différentes peut-on former avec n lettres (différentes) données ?

On sait déjà combien de séquences de lettres on peut former: c'est $\frac{n!}{(n-k)!}$. Pour trouver le nombre de tas il faut diviser ce nombre par le nombre de permutations de k lettres possibles, qui vaut $k!$.

Réponse $\rightarrow$ compter le nombre de mots réalisable avec les lettres de chaque "tas"

$$\frac{n!}{(n-k)!k!}$$

$\hookrightarrow$ C'est un entier naturel.

Les coefficients binomiaux

Définition

Pour $0 \leq k \leq n$, le nombre précédent est appelé coefficient binomial et noté:

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{(n-k)!k!} = C_n^k$$

se lit n choose k

Calculer $\binom{n}{k}$, pour tous les k et n , permet donc de compter le nombre de "tas" (sans tenir compte de l'ordre) **de k objets distincts** (par exemple des lettres) **choisis parmi n objets distincts**.

On va maintenant voir comment les calculer.

Contenu de la section

Combinatoire

Puissances et comptage avec répétition

Factorielle et comptage sans répétition

Coefficients binomiaux et comptage de “tas”

Propriétés des coefficients binomiaux

Formule du binôme de Newton

Symétrie des coefficients binomiaux

Quand on compte des “tas”, on peut poser deux questions similaires :

Question

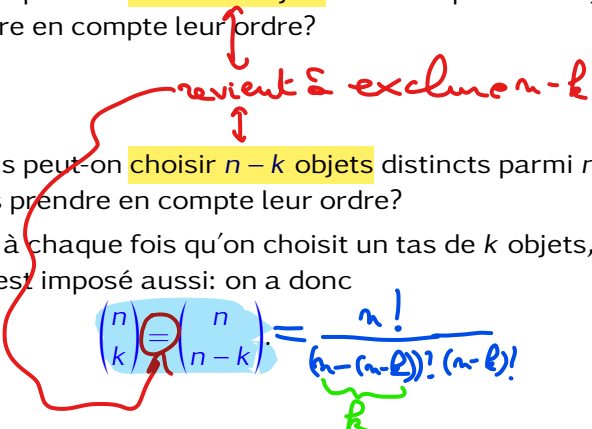
De combien de façons peut-on choisir k objets distincts parmi n objets distincts, sans prendre en compte leur ordre?

Réponse: $\binom{n}{k}$.

Question

De combien de façons peut-on choisir $n - k$ objets distincts parmi n objets distincts, sans prendre en compte leur ordre?

Réponse: $\binom{n}{n-k}$. Mais à chaque fois qu'on choisit un tas de k objets, le tas des $n - k$ autres est imposé aussi: on a donc



$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} = \frac{n!}{\underbrace{(n-(n-k))!}_{k} (n-k)!}$$

La preuve de ce résultat par le calcul

On peut directement démontrer ce résultat par un calcul en utilisant la définition des coefficients binomiaux:

$$\begin{aligned}\binom{n}{n-k} &= \frac{n!}{(n-(n-k))!(n-k)!} \\ &= \frac{n!}{k!(n-k)!} \\ &= \binom{n}{k}.\end{aligned}$$

Calcul des coefficients binomiaux par récurrence

Résultat

Pour tout entier naturel $n \geq 0$, pour tout entier naturel $k \geq 1$:

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$$

Cette proposition doit être vue comme **une formule de récurrence sur n** . Si pour un n donné on connaît tous les coefficients binomiaux $\binom{n}{k}$ pour $0 \leq k \leq n$ on peut alors calculer les coefficients binomiaux $\binom{n+1}{k}$.

Preuve

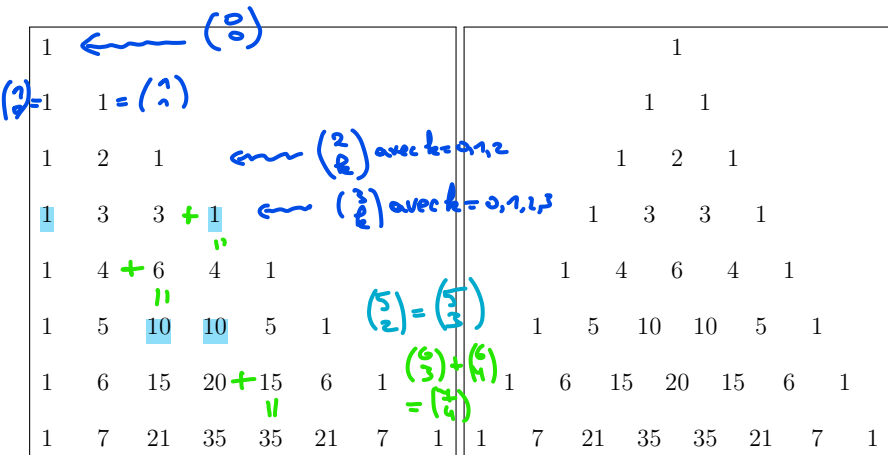
On calcule le membre de droite en utilisant la définition des coefficients binomiaux:

$$\begin{aligned}
 & \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \\
 &= \frac{n!}{(n-k)!k!} + \frac{n!}{(n-(k-1))!(k-1)!} \\
 &= \frac{n!(n-k+1)}{(n-k)!k!(n-k+1)} + \frac{n!k}{(n-k+1)!k(k-1)!} \\
 &= \frac{n!(n-k+1) + n!k}{k!(n-k+1)!} \\
 &= \frac{n!(n-k+1+k)}{(n+1-k)!k!} = \frac{n!(n+1)}{(n+1-k)!k!} = \binom{n+1}{k}
 \end{aligned}$$

multiplier
chaq
terme
par 1.
pour
mettre au
m. dén.

Triangle de Pascal

Ce calcul se représente graphiquement par le **Triangle de Pascal**:



Chaque nombre est la valeur d'un coefficient binomial. La première ligne correspond à $n = 0$, la deuxième à $n = 1$, etc... La première colonne correspond à $k = 0$, la dernière à $k = n$.

Contenu de la section

Combinatoire

Puissances et comptage avec répétition

Factorielle et comptage sans répétition

Coefficients binomiaux et comptage de “tas”

Propriétés des coefficients binomiaux

Formule du binôme de Newton

Formule du binôme de Newton

Les coefficients binomiaux interviennent naturellement quand on veut développer des puissances.

Exemple

$$(x + y)^2 = (x + y)(x + y) = xx + xy + yx + yy = 1x^2 + 2xy + 1y^2$$

$$\begin{aligned}(x + y)^3 &= (x + y)(x + y)(x + y) \\ &= x(xx + xy + yx + yy) + y(xx + xy + yx + yy) \\ &= 1x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + 1y^3\end{aligned}$$

Les coefficients $(1, 2, 1)$ et $(1, 3, 3, 1)$ correspondent aux lignes $n = 2$ et $n = 3$ du triangle de Pascal. (Donc respectivement la 3ème et 4ème ligne).

Triangle de Pascal (Rappel)

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

1 6 15 20 15 6 1

1 7 21 35 35 21 7 1

$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$. Les coefficients sont **(1, 2, 1)** sur la troisième ligne ($n = 2$).

$(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$. Les coefficients sont **(1, 3, 3, 1)** sur la quatrième ligne ($n = 3$).

Formule du binôme de Newton

Plus généralement, les coefficients binomiaux apparaissent dans la formule du binôme:

Résultat (Formule du binôme de Newton)

$$\begin{aligned}
 (x + y)^n &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k} \\
 &= \binom{n}{0} y^n + \binom{n}{1} x y^{n-1} + \binom{n}{2} x^2 y^{n-2} + \cdots + \binom{n}{n-1} x^{n-1} y + \binom{n}{n} x^n \\
 &= 1 y^n + \binom{n}{1} x y^{n-1} + \cdots + \binom{n}{n-1} x^{n-1} y + 1 x^n.
 \end{aligned}$$

Preuve

Par récurrence. Nous ne la ferons pas ici, vous pouvez la lire dans le syllabus.

Illustration avec le triangle de Pascal:

$1 = 2^0$
 $1 + 1 = 2 = 2^1$
 $1 + 2 + 1 = 4 = 2^2$
 $1 + 3 + 3 + 1 = 8 = 2^3$
 $1 + 4 + 6 + 4 + 1 = 16 = 2^4$
 $1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1 \neq 2^5$
 $1 \quad 6 \quad 15 \quad 20 \quad 15 \quad 6 \quad 1 \vdots$
 $1 \quad 7 \quad 21 \quad 35 \quad 35 \quad 21 \quad 7 \quad 1$

La première ligne correspond à $n = 0$. Pour calculer $(x + y)^5$ on lit les coefficients sur la sixième ligne du tableau:

$$(x + y)^5 = x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5.$$

$$2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot 1^k \cdot 1^{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$$