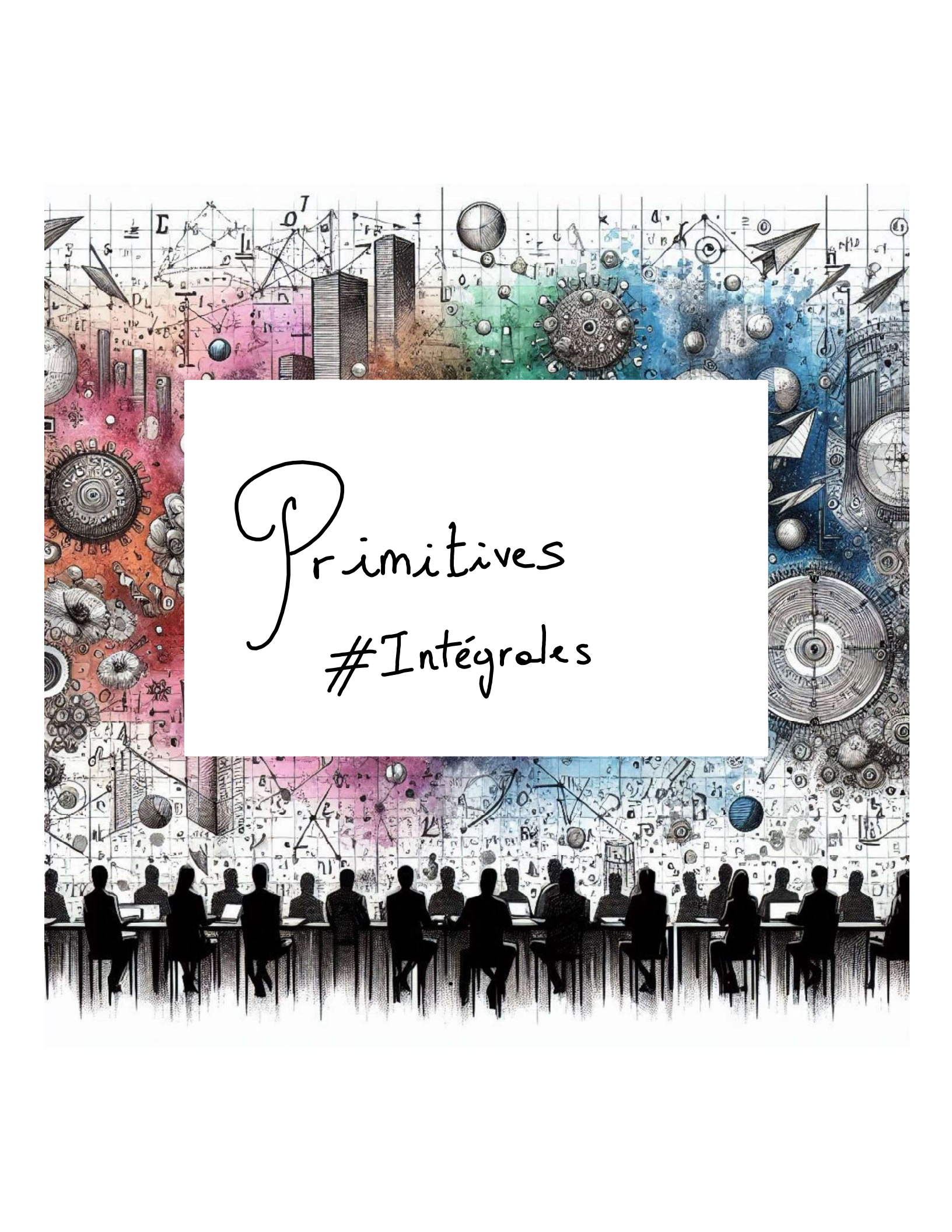




Primitives #Intégrales

f une fonction. F (une autre fonction)
est une **primitive** de f si

$$F' = f \Leftrightarrow \int f = F.$$

Si F est une primitive de f

Alors $\tilde{F} = F + \text{cte}$ aussi

$$\begin{aligned} \text{car } (\tilde{F})' &= (F + \text{cte})' \\ &= F' + 0 \\ &= f \end{aligned}$$

De même,

$$\int a \cdot f(x) dx = a \cdot \int f(x) dx$$

$$\int f(x) \pm g(x) dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$$

Pour les polynomes :

$$\int x^a dx = \frac{1}{a+1} x^{a+1} \quad \text{pour } a \neq -1$$

11.1. Soit f une fonction admettant comme primitive la fonction appliquant x sur $2\sin^2 x$. Déterminer parmi les expressions suivantes celles qui représentent aussi une primitive de f :

a) $-\cos 2x$;

c) $\cos x^2$;

b) $-\cos^2 x$;

d) $\sin\left(2x - \frac{\pi}{2}\right)$.

$F(x) = 2\sin^2 x$ est telle que

$$F'(x) = f(x) \Leftrightarrow 2 \cdot (2\sin x) \cdot \cos x = f(x)$$

On calcule la dérivée des propositions

a) $(-\cos 2x)' = 2 \cdot \sin(2x)$.

$= 2 \cdot 2\sin(x)\cos x$ ✓

b) $(-\cos^2 x)' = 2\sin(x) \cdot \cos(x)$ ✗

c) $(\cos(x^2))' = -\sin(x^2) \cdot 2x$ ✗

d) $\left(\sin\left(2x - \frac{\pi}{2}\right)\right)' = \cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) \cdot 2 = 2 \cdot (\sin 2x)$ ✓

11.2. Donner, par intégration immédiate, une primitive de la fonction

f) $\frac{1}{\cos^2 9x}$;

$t = 9x \Rightarrow \int f(t) = \frac{1}{9} \cdot \int f(u)$
~ changement d'échelle

$$\hookrightarrow = \frac{1}{9} \cdot \int \frac{1}{\cos^2 t} dt = \frac{1}{9} \tan t = \frac{1}{9} \tan(9x)$$

OU $\int \frac{1}{\cos^2 9x} dx \sim \tan 9x$, Mais $(\tan 9x)' = \frac{1}{\cos^2 9x} \cdot 9$
 $\rightarrow \int \frac{1}{\cos^2 9x} dx = \frac{1}{9} \tan 9x$

h) $e^{\sin x} \cos x$; $(e^{f(x)})' = e^{f(x)} \cdot f'(x)$

$\rightarrow e^{\sin x}$

u) 1993; $\rightarrow 1993x$

11.3. Calculer, en décomposant l'intégrande :

b) $\int \left(\frac{3}{\sqrt[3]{x}} - \frac{x\sqrt{x}}{\sqrt[5]{x}} \right) dx;$

$$\begin{aligned} &= \int 3 \cdot x^{-\frac{1}{3}} dx - \int x \cdot x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{-\frac{1}{5}} dx \\ &= 3 \cdot \frac{3}{2} \cdot x^{\frac{2}{3}} - \frac{10}{23} \cdot x^{\frac{23}{10}} \end{aligned}$$

$1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{5} = \frac{13}{10}$

$$= \frac{9}{2} x^{\frac{2}{3}} - \frac{10}{23} x^{\frac{23}{10}}$$

c) $\int \cos^2(x-2) dx; = \int \frac{1 + \cos(2(x-2))}{2} dx$

$$= \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \int \cos(2x-4) dx$$

$$= \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \frac{\sin(2x-4)}{2}$$

$$\rightarrow \int f(ax+b) dx = \frac{F(ax+b)}{a}$$

Plus précisément :

$$\text{Si } \int f(u) du = F(u)$$

$$\begin{aligned} \text{Alors } \int f(ax+b) du \\ = \frac{1}{a} F(ax+b) \end{aligned}$$

→ changement d'échelle

Chgt de variables

$$\int f(u(x)) u'(x) dx = \int f(t) dt$$

$$\begin{aligned} \text{Car } \int (F(u(x)))' dx &= \int F'(u(x)) u'(x) dx \\ &= \int f(u(x)) u'(x) dx \end{aligned}$$

Concrètement :

peut être
enchassée dans
une autre fct

① Vérifier qu'on a une fonction et
sa dérivée en multiplication avec dx

② Poser $t = u(x)$

③ Calculer $dt = u'(x) dx$

④ Remplacer dans l'intégrande

! Aux constantes multiplicatives.

11.4. Calculer, par changement de variable :

b) $\int x^2(1-x^3)^2 dx$; $t = 1 - x^3 \rightarrow dt = -3x^2 dx$
 $\rightarrow x^2 dx = \frac{dt}{-3}$
 $= \int t^2 \frac{dt}{-3} = -\frac{1}{3} \left(\frac{t^3}{3} \right) + C$
 $= -\frac{1}{9} \cdot (1-x^3)^3 + C$

g) $\int \frac{dx}{x \ln x}$; $t = \ln x \rightarrow dt = \frac{1}{x} dx$
 $= \int \frac{1}{t} dt = -\frac{1}{2t^2} + C = -\frac{1}{2(\ln x)^2} + C$

~~une primitive~~ $\rightarrow + C$

11.5. Calculer

$$\int \frac{2e^{1/x}}{x^2} dx,$$

puis déterminer toutes les fonctions $x \mapsto f(x)$ telles que

$$f'(x) = \frac{2e^{1/x}}{x^2} \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0.$$

$$\int \frac{2e^{1/x}}{x^2} dx$$

$$t = \frac{1}{x}, \quad dt = -\frac{1}{x^2} dx$$

$$= \int 2 \cdot e^t \cdot (-dt)$$

$$= -2e^t + C = -2e^{1/x} + C$$

$$\textcircled{*} \lim_{x \rightarrow \infty} (-2e^{1/x} + C) = -2e^0 + C = -2 + C$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} (-2e^{1/x} + C) = 0 \Leftrightarrow C = 2$$

Intégrale par parties (IPP)

- $(fg)' = f'g + fg'$

$$\Leftrightarrow f'g = (fg)' - fg'$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \int f'g \, dx &= \int (fg)' \, dx - \int fg' \, dx \\ &= f(x)g(x) - \int fg' \, dx\end{aligned}$$

+ C

11.6. Intégrer par parties la fonction appliquant x sur

d) $x \arctan x$;

$$\int x \arctan x \, dx \quad \begin{array}{l} f' = x \quad f = \frac{x^2}{2} \\ g = \arctan x \quad g' = \frac{1}{1+x^2} \end{array}$$

$$= \arctan x \cdot \frac{x^2}{2} - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{1+x^2} \, dx + C$$

$$= \arctan x \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} \int \left[\frac{x^2}{1+x^2} \right] dx + C$$

$\frac{x^2}{1+x^2} = \frac{1+x^2-1}{1+x^2} = 1 - \frac{1}{1+x^2}$

$$= \frac{x^2}{2} \arctan x - \frac{1}{2} \left(\int 1 \, dx - \int \frac{1}{1+x^2} \, dx \right) + C$$

$$= \frac{x^2}{2} \arctan x - \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \arctan x + C$$

$$= \frac{1+x^2}{2} \arctan x - \frac{x}{2} + C$$

e) $e^x \sin x$;

$$\begin{array}{ll} f = \sin x & f' = \cos x \\ g' = e^x & g = e^x \end{array}$$

$$\begin{aligned} \int e^x \sin x dx &= e^x \sin x - \int e^x \cos x dx \\ &= e^x \sin x - \left(e^x \cos x + \int e^x \sin x dx \right) \\ &= e^x (\sin x - \cos x) - \int e^x \sin x dx + C \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow 2 \cdot \int e^x \sin x dx = e^x (\sin x - \cos x) + C$$

$$\Leftrightarrow \int e^x \sin x dx = \frac{e^x}{2} (\sin x - \cos x) + C$$

Intégrer des fonctions rationnelles de $\sin x$ et $\cos x$

- des changements de variables

- $t = \cos x \quad dt = -\sin x dx$

- $t = \sin x \quad dt = \cos x dx$

- La formule

$$1 = \cos^2 x + \sin^2 x$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 x = 1 - \sin^2 x$$

- le co-tangente

$$t = \tan \frac{x}{2}$$

11.16. Calculer les intégrales indéfinies (de fonctions rationnelles en $\sin x$ et $\cos x$) :

b) $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x} dx$; +C si $t = \cos x$, $dt = -\sin x dx$
et $\sin^2 x = 1 - t^2$

$$= - \int \frac{(1-t^2)}{t^2} dt = \int 1 dt - \int \frac{1}{t^2} dt$$

$$= t - \left(-\frac{1}{t}\right) = \cos x + \frac{1}{\cos x} + C$$

c) $\int \frac{dx}{1 + \sin x}$;

$$= \int \frac{1}{1 + \sin x} \cdot \frac{1 - \sin x}{1 - \sin x} dx$$

$$= \int \frac{1 - \sin x}{1 - \sin^2 x} dx$$

$$= \int \frac{1}{\cos^2 x} - \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx = \tan x - \int \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx$$

$$= \tan x - \int \frac{1}{t^2} dt$$

$$= \tan x - \left(-\frac{1}{\cos x}\right) = \tan x + \frac{1}{\cos x} + C$$

On chercherait du $\sin^2 x$ (pour avoir du $\cos^2 x$ caché et utiliser la technique ci-dessus).

$$t = \cos x \\ dt = -\sin x dx$$

