

#Intégrales

Intégrer $\frac{1}{ax^2+bx+c}$

• $\Delta < 0 \rightarrow$ Construire $\frac{1}{u^2+1}$

① Mettre a en évidence

② Construire $(x + \frac{b}{2a})^2$

③ Mettre en évidence pour avoir la corde = 1

④ Ecrire $(k(x + \frac{b}{2a}))^2 + 1 \rightarrow$ Arc tan

• $\Delta > 0 \rightarrow$ Fractions simples

$$\frac{1}{ax^2+bx+c} = \frac{1}{a} \cdot \left(\frac{A}{x-\lambda_1} + \frac{B}{x-\lambda_2} \right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{a} \left(\frac{(A-B)x - \lambda_2 A - \lambda_1 B}{(x-\lambda_1)(x-\lambda_2)} \right) = \frac{1}{a}$$

• $\Delta = 0 \rightarrow$ Chgt de variable

$$\frac{1}{ax^2+bx+c} = \frac{1}{a(x-\lambda)^2} \sim \frac{1}{k} \cdot \frac{1}{t^2}$$

$(2x)^2$ $2 \cdot 2 \cdot x \cdot ?$ $\rightarrow 3$

$$= \int \frac{dx}{(2x-3)^2 - 9 + 10} + C$$

$$\Delta = (-12)^2 - 4 \cdot (4 \cdot 10)$$

$$= 144 - 160 = -16$$

$$\rightarrow \int \frac{1}{u^2 + 1} du$$

$$t = 2x - 3 \quad dt = 2dx$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{dx}{t^2 + 1} = \frac{\arctan(2x-3)}{2} + C$$

$$= \int \frac{1}{(x-1)(x+7)} dx$$

$$= \int \frac{A(x+7) + B(x-1)}{(x-1)(x+7)} dx$$

$$= \int \frac{1/8}{(x-1)} - \frac{1/8}{(x+7)} dx$$

$$= \frac{1}{8} (\ln|x-1| - \ln|x+7|) + C$$

$$\Delta = 6^2 - 4 \cdot (1 \cdot (-7))$$

$$= 36 + 28 = 64$$

$\rightarrow$ fractions simples

~~Solutions:~~ $\frac{-6 \pm \sqrt{\Delta}}{2}$

$$= \frac{-6 \pm 8}{2} \begin{cases} 1 \\ -7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ 7A - B = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = -B \\ 8A = 1 \end{cases}$$

$$\underbrace{\hspace{10em}}_{\text{dérivée} = 2x+2} = \int \frac{\frac{3}{2}(2x+2) - 4}{x^2+2x+5} dx$$

$$= \int \frac{3}{2} \cdot \frac{2x+2}{x^2+2x+5} dx - \int \frac{4}{x^2+2x+5} dx$$

$$\downarrow t = x^2+2x+5 \\ dt = (2x+2)dx$$

$\hookrightarrow$

$$\Delta = 4 - 4 \cdot (1 \cdot 5) \\ = -16$$

$$\rightarrow \int \frac{1}{u^2+1} du$$

$$= \frac{3}{2} \int \frac{1}{t} dt - \int \frac{4}{(x+1)^2 - 1 + 5} dx$$

$$= \frac{3}{2} \ln|t| - \int \frac{4}{(x+1)^2 + 4} dt + C$$

$\hookrightarrow$ on veut 1 $\Rightarrow$ on divise par 4

$$= \frac{3}{2} \ln|x^2+2x+5| - \int \frac{1}{\frac{(x+1)^2}{4} + 1} dt + C$$

$$u = \frac{x+1}{2}$$

$$= \frac{3}{2} \ln|x^2+2x+5| - \int \frac{1}{u^2+1} du + C$$

$$= \frac{3}{2} \ln|x^2+2x+5| - \operatorname{arctan}(u) + C$$

$$= \frac{3}{2} \ln|x^2+2x+5| - \operatorname{arctan}\left(\frac{x+1}{2}\right) + C$$



Intégrale de Riemann



a. $\int_0^{\sqrt{e-1}} \frac{4x}{1+x^2} dx;$

d. $\int_0^e \ln(1+2x) dx;$

$$a. \int \frac{4x}{1+x^2} dx = \int \frac{2 du}{u} = 2 \ln|u| + \text{cst} = 2 \ln|1+x^2| + \text{cst}$$

$$u = 1+x^2 \\ du = 2x dx$$

$$\Rightarrow \int_0^{\sqrt{e-1}} \frac{4x}{1+x^2} dx = \left[2 \ln|1+x^2| \right]_0^{\sqrt{e-1}} = 2 \ln|1+(\sqrt{e-1})^2| - 2 \ln|1+0^2| \\ = 2 \ln|e| - 2 \ln 1 = 2 \cdot 1 - 2 \cdot 0 = 2$$

d. $\int_0^e \ln(1+2x) dx$

$u = \ln(1+2x)$

$u' = \frac{2}{1+2x}$

$v = x$

$v' = 1$

$$\Rightarrow \int_0^e \ln(1+2x) dx = \left[x \ln(1+2x) \right]_0^e - \int_0^e x \cdot \frac{2}{1+2x} dx$$

$$= (e \ln(1+2e) - 0) - \int_0^e \frac{2x+1}{2x+1} - \frac{1}{1+2x} dx$$

$$= e \ln(1+2e) - \left[x \right]_0^e + \int_0^e \frac{1}{1+2x} dx$$

$$= e \ln(1+2e) - (e-0) + \left[\frac{1}{2} \ln|1+2x| \right]_0^e$$

$$= e \ln(1+2e) - e + \frac{1}{2} \ln|1+2e| - \frac{1}{2} \ln|1+2 \cdot 0|$$

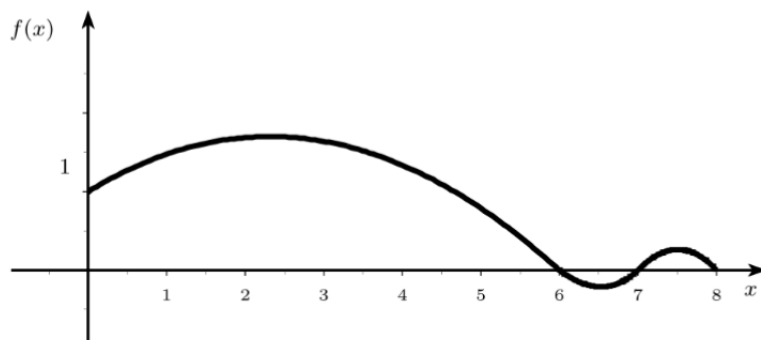
$$= e \ln(1+2e) - e + \frac{1}{2} \ln(1+2e)$$

12.4. À partir du graphe de la fonction f , supposée deux fois dérivable, répondez aux questions suivantes sur la fonction $F : [0, 8] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt,$$

éventuellement en donnant une valeur exacte ou approchée, et en discutant votre réponse :

- que vaut $F(0)$?
- donnez deux bornes entre lesquelles est compris $F(6)$;
- quel est le maximum de la fonction F ? en quel(s) point(s) de $[0, 8]$ ce maximum est-il atteint ?
- idem pour le minimum de F ;
- idem pour le minimum de F' ;
- idem pour le minimum de F'' .

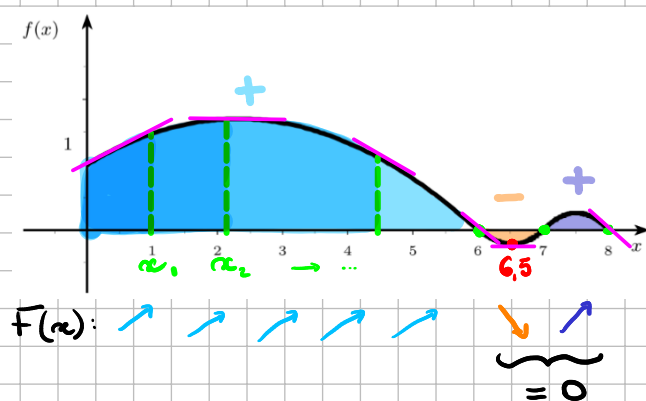
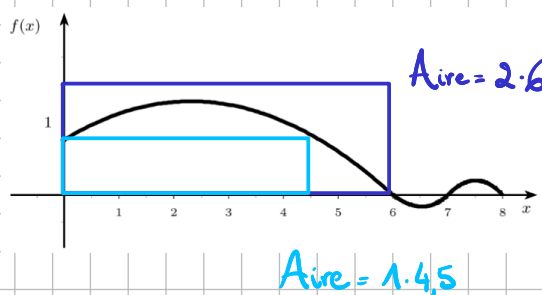


a. $F(0) = \int_0^0 f(t) dt = 0$

b. $F(6) = \int_0^6 f(t) dt$

= "aire sous la courbe entre $x=0$ et $x=6$ "

$4,5 \leq F(6) \leq 12$



c. F atteint son maximum en $x=6$ et $x=8$.

d. F atteint son minimum en $x=0$.

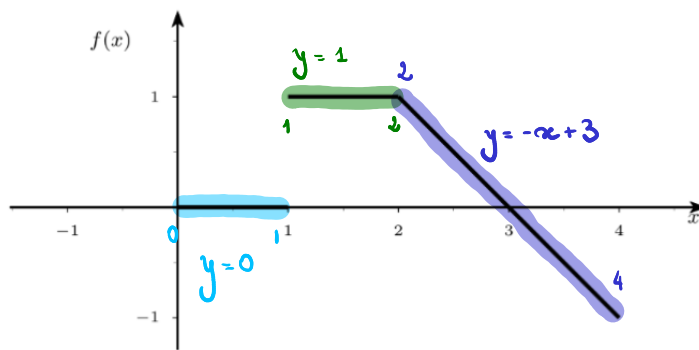
e. $F'(x) = f(x) \quad \forall x \in [0, 8]$

Donc F a un **minimum** en $x=6,5$.

f. $F''(x) = f'(x) =$ la **pende de la tangente** à la courbe.

F'' a un minimum en $x=6$ et $x=8$.

12.7. Voici le graphe d'une fonction $f : [0, 4] \rightarrow \mathbb{R}$. Tracez (à la même échelle) le graphe de la primitive F de f telle que $F(0) = 2$.



* entre 0 et 1 : $y=0$. $\rightarrow$ la primitive est une constante.

Or on sait que $F(0)=2$.

On a donc que $F(x)=2$ sur $[0, 1]$.

* entre 1 et 2 : $y=1$ $\rightarrow$ la primitive est de la forme $1x + \text{cte}$.

Or on sait que $F(1)=2$, donc $1 + \text{cte} = 2$.

On a alors que $F(x) = x + 1$ sur $[1, 2]$

* entre 2 et 4 : $y = -x + 3 \rightarrow$ la primitive est de la forme $-\frac{x^2}{2} + 3x + \text{cte}$.

Or on sait que $F(2) = 2 + 1 = -\frac{2^2}{2} + 3 \cdot 2 + \text{cte}$

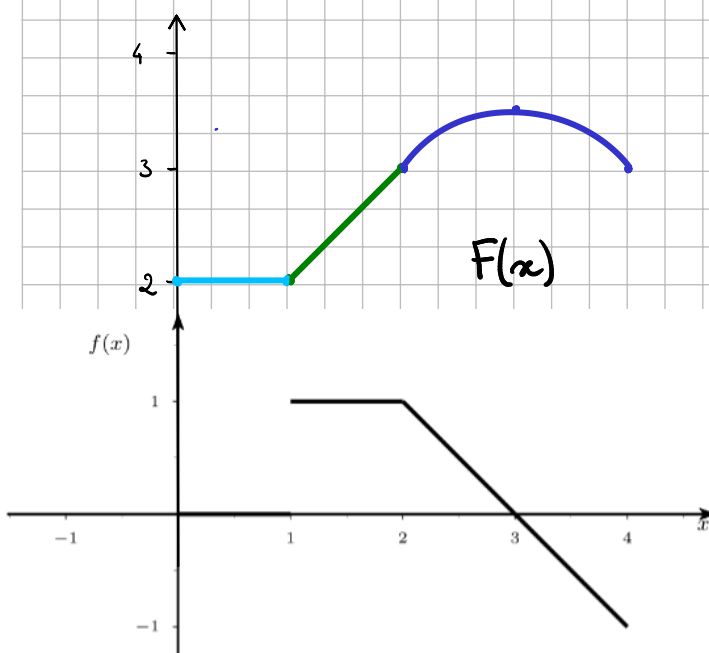
$$\Leftrightarrow 3 = -2 + 6 + \text{cte}$$

$$\Leftrightarrow -1 = \text{cte}$$

Donc on a $F(x) = -\frac{x^2}{2} + 3x - 1$ sur $[2, 4]$

$$\text{en } x=3: -\frac{9}{2} + 9 - 1 = 3,5$$

$$\text{en } x=4: -\frac{16}{2} + 12 - 1 = 3$$



12.12. Soit $g(x) = e^{-3x} \sin 2x$.

a) Déterminer A et B pour que la fonction $f(x) = e^{-3x}(A \cos 2x + B \sin 2x)$ soit une primitive de g ;

b) Calculer $\int_0^\pi g(x) dx$.

a) On veut que $g(x) = f'(x)$, c'est-à-dire que

$$\begin{aligned} e^{-3x} \sin 2x &= [e^{-3x} (A \cos 2x + B \sin 2x)]' \\ &= (e^{-3x})' (A \cos 2x + B \sin 2x) + e^{-3x} (A \cos 2x + B \sin 2x)' \\ &= -3e^{-3x} (A \cos 2x + B \sin 2x) + e^{-3x} (-2A \sin 2x + 2B \cos 2x) \\ &= e^{-3x} (\cos 2x (-3A + 2B) + \sin 2x (-3B - 2A)) \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \sin 2x = \cos 2x (-3A + 2B) + \sin 2x (-3B - 2A)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 = -3B - 2A & (1) \\ 0 = -3A + 2B & (2) \end{cases}$$

En calculant $2(1) + 3(2)$, on a :

$$2 = -4A - 9A \Rightarrow A = \frac{-2}{13}$$

En substituant A par $\frac{-2}{13}$ dans (2), on obtient :

$$3 \cdot \frac{-2}{13} = 2B \Rightarrow B = \frac{-3}{13}$$

Les valeurs recherchées sont $A = \frac{-2}{13}$ et $B = \frac{-3}{13}$.

$$\begin{aligned} \text{b) } \int_0^\pi g(x) dx &= [f(x)]_0^\pi = \left[e^{-3x} \left(\frac{-2}{13} \cos 2x - \frac{3}{13} \sin 2x \right) \right]_0^\pi \\ &= e^{-3\pi} \left(\frac{-2}{13} \underbrace{\cos 2\pi}_1 - \frac{3}{13} \underbrace{\sin 2\pi}_0 \right) - \underbrace{e^{-3 \cdot 0}}_1 \left(\frac{-2}{13} \underbrace{\cos 0}_1 - \frac{3}{13} \underbrace{\sin 0}_0 \right) \\ &= \frac{-2}{13} (e^{-3\pi} - 1) \end{aligned}$$

12.13. Pourquoi les intégrales suivantes sont-elles dites « généralisées » ? Calculez la valeur chaque fois qu'elle existe, sinon donnez des informations sur la divergence.

$$d) \int_0^{\pi/2} \operatorname{tg} x \, dx;$$

$$b) \int_1^{\infty} \frac{1}{x^3} \, dx;$$

Cette intégrale est dite généralisée car l'une de ses bornes est infinie et non réelle.

$$\begin{aligned} \int_1^{\infty} \frac{1}{x^3} \, dx &:= \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_1^R \frac{1}{x^3} \, dx = \lim_{R \rightarrow +\infty} \left[\frac{x^{-2}}{-2} \right]_1^R = \lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{R^{-2}}{-2} - \frac{1^{-2}}{-2} \\ &= \lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{-1}{2R} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

L'intégrale généralisée existe et vaut $\frac{1}{2}$

d) Cette intégrale est dite généralisée car l'intégrande n'est pas définie sur l'une des bornes (ici $\frac{\pi}{2}$).

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} \operatorname{tg} x \, dx &:= \lim_{R \nearrow \frac{\pi}{2}} \int_0^R \operatorname{tg} x \, dx = \lim_{R \nearrow \frac{\pi}{2}} \int_0^R \frac{\sin x}{\cos x} \, dx = \lim_{R \nearrow \frac{\pi}{2}} \left[-\ln|\cos x| \right]_0^R \\ &\quad \text{Posons } u = \cos x \\ &\quad \quad du = -\sin x \, dx \quad \hookrightarrow \int \frac{du}{u} = -\ln|u| \\ &= \lim_{R \nearrow \frac{\pi}{2}} -\ln|\cos R| + \ln|\cos 0| = \lim_{R \nearrow \frac{\pi}{2}} -\ln \underbrace{\cos R}_{0^+} = +\infty \end{aligned}$$

L'intégrale généralisée diverge.

12.14. Calculer les deux intégrales (attention !)

$$\int_0^1 \frac{t^3}{1-t^2} dt.$$

$$\int \frac{t^3}{1-t^2} dt = \int \frac{(1-u) \left(\frac{-du}{2dt} \right)}{u} dt = \int \frac{1-(1-u)}{2u} du = \frac{1}{2} \left(-\int \frac{1}{u} du + \int \frac{u}{u} du \right)$$

On pose: $u = 1-t^2 \rightarrow t^2 = 1-u$
 $du = -2t dt \rightarrow t = \frac{-du}{2dt}$

$$= \frac{1}{2} (-\ln|u| + u + \text{cte})$$

$$= \frac{1}{2} (-\ln|1-t^2| + (1-t^2) + \text{cte})$$

$$\int_0^1 \frac{t^3}{1-t^2} dt = \lim_{R \rightarrow 1} \int_0^R \frac{t^3}{1-t^2} dt = \lim_{R \rightarrow 1} \left[\frac{1}{2} (-\ln|1-t^2| + (1-t^2)) \right]_0^R$$

$$= \lim_{R \rightarrow 1} \frac{1}{2} \left[-\ln|1-R^2| + (1-R^2) + \ln|1-0| - (1-0^2) \right]$$

$$= \lim_{R \rightarrow 1} \frac{1}{2} \left(\underbrace{-R^2}_{\downarrow 1} - \ln|1-R^2| \right) = +\infty$$

