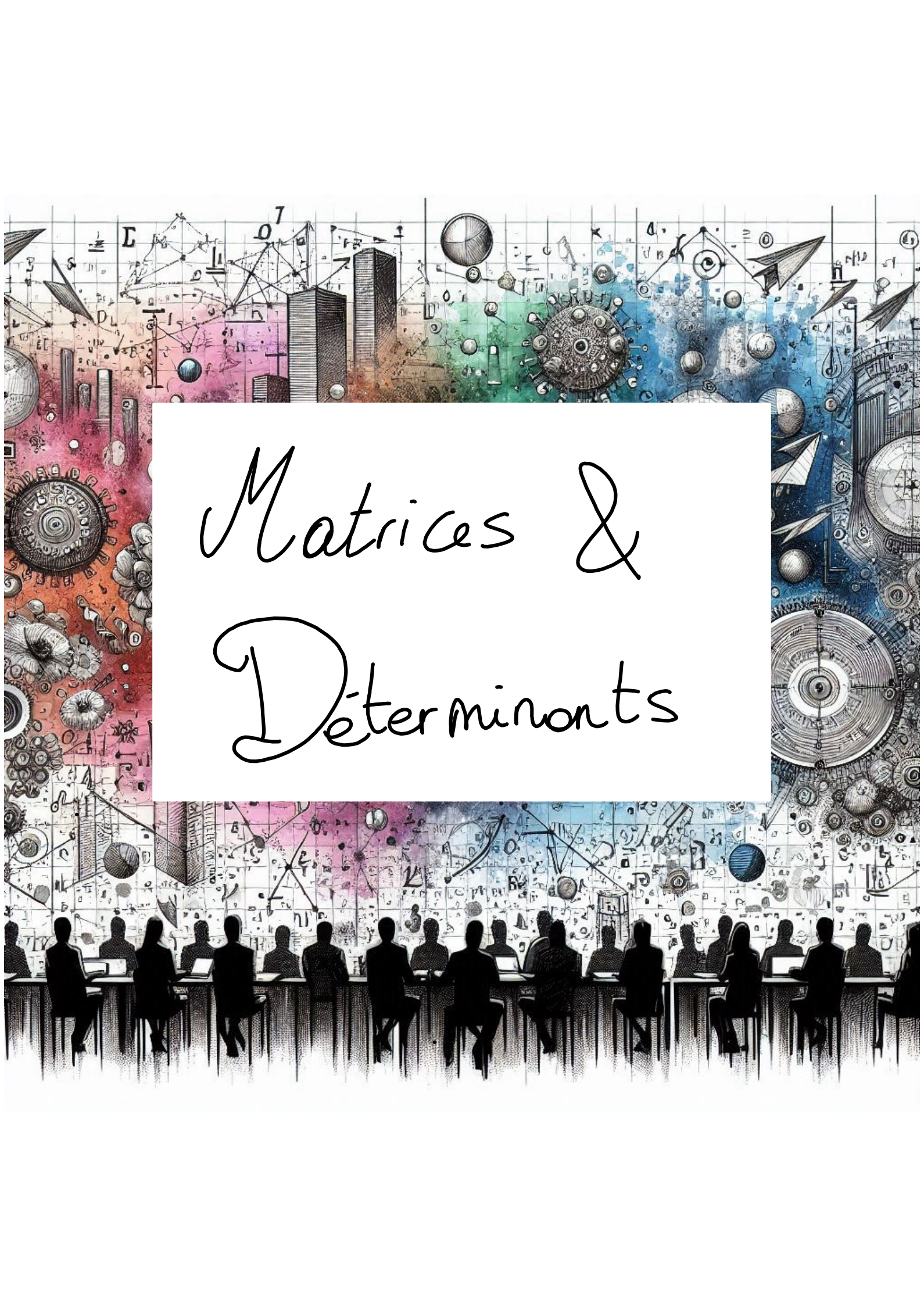




Matrices & Determinants



14.2. Si $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$

montrer que $(A+B)^2 = A^2 + B^2$

est-il vrai pour tout choix de deux matrices réelles ?

$$\bullet A + B = \begin{pmatrix} 1+1 & -1+1 \\ 2+4 & -1-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow (A+B)^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 2 + 0 \cdot 4 & 2 \cdot 0 + 0 \cdot (-2) \\ 4 \cdot 2 + (-2) \cdot 4 & 4 \cdot 0 + (-2) \cdot (-2) \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\bullet A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 2 & 1 \cdot (-1) + (-1) \cdot (-1) \\ 2 \cdot 1 + (-1) \cdot 2 & 2 \cdot (-1) + (-1) \cdot (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 1 \cdot 4 & 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) \\ 4 \cdot 1 + (-1) \cdot 4 & 4 \cdot (-1) + (-1) \cdot (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow A^2 + B^2 = \begin{pmatrix} -1+5 & 0+0 \\ 0+0 & -1+5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

En général: FAUX! $A=B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$(A+B)^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^2 + B^2 = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

pfs "Gauss-Jordan"

15.2. Résoudre les systèmes réels suivants par la méthode de Gauss



$$c. \begin{cases} x + y + z - 3t = 2 \\ x - 2y + 2z + 15t = -3 \\ x + y - z - 9t = 0 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccccc} x & y & z & t & b \\ 1 & 1 & 1 & -3 & 2 \\ 1 & -2 & 2 & 15 & -3 \\ 1 & 1 & -1 & -9 & 0 \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{l} L_2 \rightarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \rightarrow L_3 - L_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & -3 & 1 & 18 & -5 \\ 0 & 0 & -2 & -6 & -2 \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{l} L_2 \rightarrow L_2 / -3 \\ L_1 \rightarrow L_1 - L_2 \\ L_3 \rightarrow L_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 4/3 & 3 & 1/3 \\ 0 & 1 & -1/3 & -6 & 5/3 \\ 0 & 0 & -2 & -6 & -2 \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{l} L_3 \rightarrow L_3 / -2 \\ L_1 \rightarrow L_1 - 4/3 L_3 \\ L_2 \rightarrow L_2 + 1/3 L_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \end{array} \right)$$

$$\rightarrow \begin{cases} x - t = -1 \\ y - 5t = 2 \\ z + 3t = 1 \end{cases}$$

$$\rightarrow S = \{ (-1+t, 2+5t, 1-3t, t) \mid t \in \mathbb{R} \}$$

$$d. \begin{cases} x + y - 2z = 1 \\ x + 2y - 3z + t = 1 \\ x - y - 2t = 1 \end{cases}$$

$$\begin{matrix} L1 \\ \rightarrow L2 \\ L3 \end{matrix} \begin{pmatrix} x & y & z & t & b \\ 1 & 1 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} L_1 \rightarrow L_1 \\ L_2 \rightarrow L_2 - L_1 \\ = \\ L_3 \rightarrow L_3 - L_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} L_2 \rightarrow L_2 \\ L_1 \rightarrow L_1 - L_2 \\ = \\ L_3 \rightarrow L_3 + 2L_2 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - z - t = 1 \\ y - z + t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + z + t \\ y = z - t \end{cases}$$

$$\rightarrow S = \left\{ (1+z+t, z-t, z, t), (z, t) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

$$i. \begin{cases} x + 3y + z = 0 \\ 2x - 2y + z = -1 \\ x + z = 0 \\ 3x + 4y = 3 \end{cases}$$

$$\begin{array}{l} L_1 \\ \rightarrow L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \begin{array}{c} x \\ y \\ z \\ b \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 3 \end{array} \right) \begin{array}{l} L_1 \rightarrow L_1 \\ L_2 \rightarrow L_2 - 2L_1 \\ = \\ L_3 \rightarrow L_3 - L_1 \\ L_4 \rightarrow L_4 - 3L_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -8 & -1 & -1 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & -3 & 3 \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{l} L_2 \rightarrow L_2 / (-8) \\ L_1 \rightarrow L_1 - 3L_2 \\ = \\ L_3 \rightarrow L_3 + 3L_2 \\ L_4 \rightarrow L_4 + 5L_2 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 5/8 & -3/8 \\ 0 & 1 & 1/8 & 1/8 \\ 0 & 0 & 3/8 & 3/8 \\ 0 & 0 & -19/8 & 29/8 \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{l} L_3 \rightarrow L_3 \cdot \frac{8}{3} \\ L_1 \rightarrow L_1 - \frac{5}{8}L_3 \\ = \\ L_2 \rightarrow L_2 - \frac{1}{8}L_3 \\ L_4 \rightarrow L_4 + \frac{19}{8}L_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{array} \right)$$

→ système impossible

$$S = \emptyset$$

Trois hommes ont chacun certaine somme d'écus.

Le premier donne des siens aux deux autres autant qu'ils en ont chacun
en après le second en donne aux deux autres autant qu'ils ont chacun
finalement le troisième en donne aux deux autres autant qu'ils en ont chacun
cela fait, chacun se trouve 8 écus.

On demande combien chacun en avait du commencement

1^{ère} étape : le premier a $x - y - z$,

2^e a $2y$

3^e a $2z$

2^e étape : le premier a $2(x - y - z)$

le 2^e a $2y - (x - y - z) - 2z = -x + 3y - z$

3^e a $4z$

3^e étape : le premier a $4(x - y - z)$

le 2^e a $2(-x + 3y - z)$

3^e a $4z - (2(x - y - z)) - (-x + 3y - z)$

$-x - y + 7z$

On pose

$$\begin{cases} 4(x - y - z) = 8 \\ 2(-x + 3y - z) = 8 \\ -x - y + 7z = 8 \end{cases}$$

$$\text{On } \begin{cases} x - y - z = 2 \\ -x + 3y - z = 4 \\ -x - y + 7z = 8 \end{cases}$$

$$\text{On } \text{répond:} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & | & 2 \\ -1 & 3 & -1 & | & 4 \\ -1 & -1 & 7 & | & 8 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} &L_2 \rightarrow L_1 \\ &L_2 \rightarrow L_2 + L_1 \\ &L_3 \rightarrow L_3 + L_1 \end{aligned} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & | & 2 \\ 0 & 2 & -2 & | & 6 \\ 0 & -2 & 6 & | & 10 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} &L_3 \rightarrow L_3 + L_2 \\ &L_2 \rightarrow L_2 / 2 \\ &L_1 \rightarrow L_1 + L_2 \end{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & | & 5 \\ 0 & 1 & -1 & | & 3 \\ 0 & 0 & 4 & | & 16 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} &L_3 \rightarrow L_3 / 4 \\ &L_1 \rightarrow L_1 + 2L_3 \\ &L_2 \rightarrow L_2 + L_3 \end{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 13 \\ 0 & 1 & 0 & | & 7 \\ 0 & 0 & 1 & | & 4 \end{pmatrix} \rightarrow S = \{(13, 7, 4)\}$$

15.9. Déterminer les inverses des matrices **réelles** suivantes

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

On pose

$$\begin{array}{c} B \\ I_{3 \times 3} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 5 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 6 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{l} L_1 \rightarrow L_1 \\ L_2 \rightarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \rightarrow L_3 - 3L_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & -3 & -3 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{l} L_2 \rightarrow -L_2 \\ L_3 \rightarrow L_2 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 3 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} L_1 \rightarrow L_1 - 2L_2 \\ L_3 \rightarrow L_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -3 & -5 & -5 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 3 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{l} L_3 \rightarrow -L_3 \\ L_1 \rightarrow L_1 + 3L_3 \\ L_2 \rightarrow L_2 - 3L_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -4 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 11 & 10 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & -1 \end{array} \right)$$

$$\rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -3 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculer les déterminants des matrices réelles suivantes, et leur matrice inverse quand elle existe :

$$e) \bar{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{pmatrix}$$

$$\det \bar{E} = -0 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} + 0 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix} - 0 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$+ 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix} = + 1 \cdot \left(1 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - 0 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} + 1 \det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \right)$$

$$= - (1 \cdot 1 - 2 \cdot 0) + (2 \cdot 2 - 4 \cdot 1) = -1 \neq 0 \Rightarrow E^{-1} \text{ existe}$$

$$\begin{array}{c} E \\ \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} L_1 \rightarrow L_1 \\ L_2 \rightarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \rightarrow L_3 - 4L_1 \\ L_4 \rightarrow L_4 + 2L_1 \end{array} = \begin{array}{c} I \\ \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 0 & -4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \end{array}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c} L_2 \rightarrow L_2 \\ L_1 \rightarrow L_1 \\ = \\ L_3 \rightarrow L_3 - 2L_2 \\ L_4 \rightarrow L_4 - 3L_2 \end{array}
 \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 1 & 8 & -3 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{c} L_3 \rightarrow L_3 \\ L_1 \rightarrow L_1 - L_3 \\ = \\ L_2 \rightarrow L_2 + 2L_3 \\ L_4 \rightarrow L_4 - 9L_3 \end{array}
 \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & -3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 8 & 15 & -9 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

$$\rightarrow E^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ -2 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 8 & 15 & -9 & 1 \end{pmatrix}$$

16.2. Montrer, sans développer de déterminant, les égalités

$$c) \quad \det \begin{pmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & c+a \\ 1 & c & a+b \end{pmatrix} = 0;$$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & c+a \\ 1 & c & a+b \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & a & b+c \\ 0 & b-a & a-b \\ 0 & c-a & a-c \end{pmatrix}$$

$$= (b-a) \det \begin{pmatrix} 1 & a & b+c \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & c-a & a-c \end{pmatrix}$$

$$= (b-a)(c-a) \det \begin{pmatrix} 1 & a & b+c \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= 0$$

Autre chemin

$$\det \begin{pmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & c+a \\ 1 & c & a+b \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & a & b+c \\ 0 & b-a & a-b \\ 0 & c-a & a-c \end{pmatrix}$$

$$= (b-a) \det \begin{pmatrix} 1 & a & b+c \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & c-a & a-c \end{pmatrix}$$

$$= (b-a)(c-a) \det \begin{pmatrix} 1 & a & b+c \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= 0$$