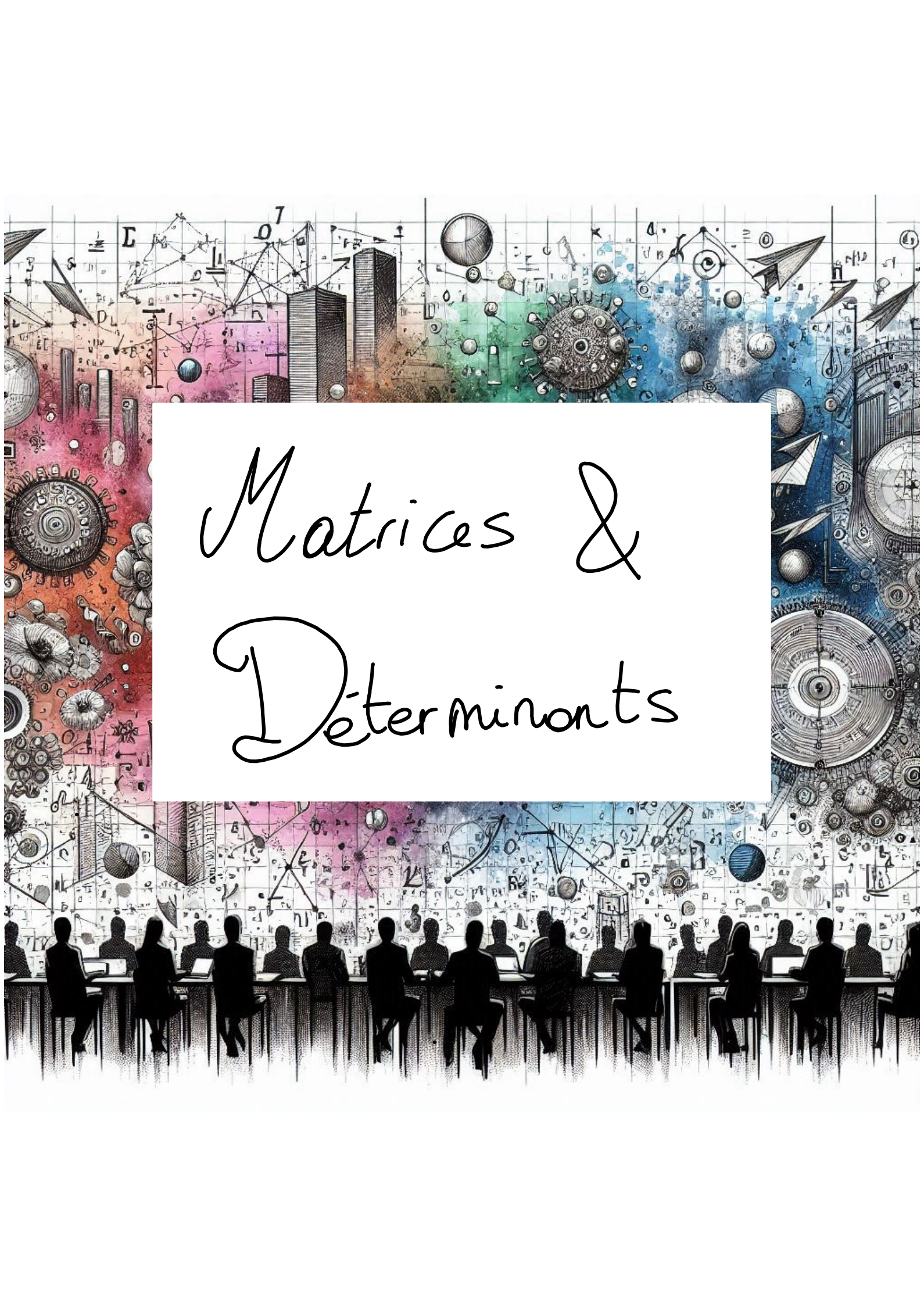




# Matrices & Determinants



14.2. Si  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$  et  $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$

montrer que  $(A+B)^2 = A^2 + B^2$

est-il vrai pour tout choix de deux matrices réelles ?

•  $A + B = \begin{pmatrix} 2 & -1+1 \\ 6 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$

$\rightarrow (A+B)^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 6 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 6 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+0 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$   
 $= \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

•  $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$

$A^2 + B^2 = \begin{pmatrix} -1+5 & 0+0 \\ 0+0 & -1+5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

En général  $\rightarrow$  FAUX

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = B$$

$$\rightarrow (A+B)^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = B^2$$

$$A^2 + B^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

pfs "Gauss-Jordan"

15.2. Résoudre les systèmes réels suivants par la méthode de Gauss

c. 
$$\begin{cases} x + y + z - 3t = 2 \\ x - 2y + 2z + 15t = -3 \\ x + y - z - 9t = 0 \end{cases}$$

$$\begin{array}{l} L_1 \\ \rightarrow L_2 \\ L_3 \end{array} \left( \begin{array}{cccc|c} x & y & z & t & b \\ 1 & 1 & 1 & -3 & 2 \\ 1 & -2 & 2 & 15 & -3 \\ 1 & 1 & -1 & -9 & 0 \end{array} \right)$$

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & x & b_1 \\ 0 & 1 & 0 & x & b_2 \\ 0 & 0 & 1 & x & b_3 \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{l} L_1 \rightarrow L_1 \\ L_2 \rightarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \rightarrow L_3 - L_1 \end{array} \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & -3 & 1 & 18 & -5 \\ 0 & 0 & -2 & -6 & -2 \end{array} \right)$$

• mult une ligne par une constante

• Additionner 2 lignes

$$\begin{array}{l} L_2 \rightarrow \frac{L_2}{-3} \\ L_1 \rightarrow L_1 - L_2 \\ L_3 \rightarrow L_3 \end{array} \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \frac{4}{3} & 3 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & -6 & \frac{5}{3} \\ 0 & 0 & -2 & -6 & -2 \end{array} \right)$$

Combinaison linéaire de lignes

$$\begin{array}{l} L_3 \rightarrow L_3 \\ L_3 \rightarrow L_3 / 2 \\ L_1 \rightarrow L_1 - \frac{4}{3} L_3 \\ L_2 \rightarrow L_2 + \frac{1}{3} L_3 \end{array} \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \end{array} \right)$$

$$\begin{cases} x - t = -1 + t \\ y - 5t = 2 + 5t \\ z + 3t = 1 - 3t \end{cases}$$

$$S = \{(t-1, 5t+2, 1-3t, t), t \in \mathbb{R}\}$$

$$d. \begin{cases} x + y - 2z = 1 \\ x + 2y - 3z + t = 1 \\ x - y - 2t = 1 \end{cases}$$

$x \quad y \quad z \quad t \quad b$

$$\begin{array}{l} L_1 \\ \rightarrow L_2 \\ L_3 \end{array} \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -2 & 1 \end{array} \right)$$

$$L_1 \rightarrow L_1$$

$$= \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & -2 & 0 \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{l} L_2 \rightarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \rightarrow L_3 - L_1 \end{array}$$

$$L_2 \rightarrow L_2$$

$$L_1 \rightarrow L_1 - L_2$$

$$L_3 \rightarrow L_3 + 2L_2$$

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\begin{cases} x - z - t = 1 \\ y - z + t = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = z + t + 1 \\ y = z - t \end{cases}$$

$$\rightarrow S = \{(z+t+1, z-t, z, t), z \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}\}$$

$$i. \begin{cases} x + 3y + z = 0 \\ 2x - 2y + z = -1 \\ x + z = 0 \\ 3x + 4y = 3 \end{cases}$$

$$\begin{array}{l} L_1 \\ \rightarrow L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \begin{array}{c} x \quad y \quad z \quad b \\ \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 3 \end{array} \right) \end{array} \begin{array}{l} L_1 \rightarrow L_1 \\ L_2 \rightarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \rightarrow L_3 - L_1 \\ L_4 \rightarrow L_4 - 3L_1 \end{array} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -8 & -1 & -1 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & -3 & 3 \end{array} \right)$$

$$L_2 \rightarrow L_2 / (-8)$$

$$L_1 \rightarrow L_1 - 3L_2$$

$$L_3 \rightarrow L_3 + 3L_2$$

$$L_4 \rightarrow L_4 + 5L_2$$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 5/8 & -3/8 \\ 0 & 1 & +1/8 & 1/8 \\ 0 & 0 & 3/8 & 3/8 \\ 0 & 0 & -19/8 & 29/8 \end{array} \right)$$

$$L_3 \rightarrow L_3 \cdot \frac{8}{3}$$

$$L_1 \rightarrow L_1 - \frac{5}{8} L_3$$

$$L_2 \rightarrow L_2 - \frac{1}{8} L_3$$

$$L_4 \rightarrow L_4 + \frac{19}{8} L_3$$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{array} \right)$$

impossible

$$S = \emptyset$$

Trois hommes ont chacun certaine somme d'écus.

Le premier donne des siens aux deux autres autant qu'ils en ont chacun  
en après le second en donne aux deux autres autant qu'ils ont chacun  
finalement le troisième en donne aux deux autres autant qu'ils en ont chacun  
cela fait, chacun se trouve 8 écus.

On demande combien chacun en avait du commencement

$$(8, 8, 8) \leftarrow (4, 4, 16) \leftarrow (2, 14, 8)$$

Etape 0 :  $x, y, z$   $(13, 7, 4)$

1 :  $x - y - z, 2y, 2z$

2 :  $2(x - y - z), \underbrace{2y - (x - y - z) - 2z}_{-x + 3y - z}, 4z$

3 :  $4(x - y - z), 2(-x + 3y - z), \underbrace{4z - 2(x - y - z) - (-x + 3y - z)}_{-x - y + 7z}$

$$O_{r2} \quad \begin{cases} x - y - z = 2 \\ -x + 3y - z = 4 \\ -x - y + 7z = 8 \end{cases}$$

$$\rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & -1 & 4 \\ -1 & -1 & 7 & 8 \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{l} L_1 \rightarrow L_1 \\ L_2 \rightarrow L_2 + L_1 \\ L_3 \rightarrow L_3 + L_1 \end{array} \quad \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & 6 \\ 0 & -2 & 6 & 10 \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{l} L_2 \rightarrow L_2 / 2 \\ L_1 \rightarrow L_1 + L_2 \\ L_3 \rightarrow L_3 + 2L_2 \end{array} \quad \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 16 \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{l} L_3 \rightarrow L_3 / 4 \\ L_1 \rightarrow L_1 + 2L_3 \\ L_2 \rightarrow L_2 + L_3 \end{array} \quad \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 13 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array} \right) \rightarrow S = \{(13, 7, 4)\}$$

15.9. Déterminer les inverses des matrices réelles suivantes

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot B^{-1} = I = B^{-1} \cdot B$$

On pose

$B$

$I_{3 \times 3}$

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$L_1 \rightarrow L_1$$

$$L_2 \rightarrow L_2 - 2L_1$$

$$L_3 \rightarrow L_3 - 3L_1$$

$$L_2 \rightarrow -L_3$$

$$L_3 \rightarrow L_2$$

$$L_2 \rightarrow L_2$$

$$L_1 \rightarrow L_1 - 2L_2$$

$$L_3 \rightarrow L_3$$

$$L_3 \rightarrow -L_3$$

$$L_1 \rightarrow L_1 + 3L_3$$

$$L_2 \rightarrow L_2 - 3L_3$$

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & -3 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -3 & 1 & -5 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 3 & 0 & -1 & \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 1 & 0 & \end{array} \right)$$

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 3 & -1 & \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & \end{array} \right)$$

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -3 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculer les déterminants des matrices réelles suivantes, et leur matrice inverse quand elle existe :

e)  $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{pmatrix}$

$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$= -0 \det \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix} + 0 \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$   
 $- 0 \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix} + 1 \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

$= +1 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - 0 + 1 \det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$   
 $= 1 (1 \cdot \overset{1}{\det}(1) - 0) + 1 (2 \cdot \overset{2}{\det}(2) - 1 \cdot \overset{4}{\det}(4))$   
 $= 1 \neq 0 \rightarrow E^{-1} \text{ existe!}$

$$\begin{array}{c} E \qquad \qquad \qquad I \\ \left( \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \end{array}$$

$$L_1 \rightarrow L_1$$

$$L_2 \rightarrow L_2 - 2L_1$$

$$L_3 \rightarrow L_3 - 4L_1$$

$$L_4 \rightarrow L_4 + 2L_1$$

$$\left( \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 0 & -3 & -4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 1 & 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$L_2 \rightarrow L_2$$

$$L_1 \rightarrow L_1$$

$$L_3 \rightarrow L_3 - 2L_2$$

$$L_4 \rightarrow L_4 - 3L_2$$

$$L_3 \rightarrow L_3$$

$$L_4 \rightarrow L_4 - 9L_3$$

$$L_1 \rightarrow L_1 - L_3$$

$$L_2 \rightarrow L_2 + 2L_3$$

$$L_4 \rightarrow L_4 - 9L_3$$

$$\left( \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 15 & -9 & 1 \end{array} \right)$$

$E^{-1}$

16.2. Montrer, sans développer de déterminant, les égalités

$$c) \quad \det \begin{pmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & c+a \\ 1 & c & a+b \end{pmatrix} = 0;$$

- Multiplier une ligne par un scalaire  
→ Multiplier le det par l'inverse
- Additionner 2 lignes  
→ Ne change pas le det
- Le det traite les lignes comme les colonnes

$$\det \begin{pmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & c+a \\ 1 & c & a+b \end{pmatrix} \xrightarrow{C_3 \leftarrow C_3 + C_2} \det \begin{pmatrix} 1 & a & a+b+c \\ 1 & b & b+c+a \\ 1 & c & c+a+b \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{C_3 \leftarrow \frac{1}{a+b+c} C_3} = (a+b+c) \det \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & b & 1 \\ 1 & c & 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\xrightarrow{C_3 \leftarrow -C_3} = -(a+b+c) \det \begin{pmatrix} 1 & a & -1 \\ 1 & b & -1 \\ 1 & c & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{C_3 \leftarrow C_3 + C_1} = -(a+b+c) \det \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 1 & b & 0 \\ 1 & c & 0 \end{pmatrix}$$