

Examen de MATH-F112 de Janvier 2023

– MATHÉMATIQUES

NOM:

PRÉNOM:

MATRICULE:

SECTION:

Exercice 1		/17
Exercice 2		/17
Exercice 3		/14
Exercice 4		/20
Exercice 5		/19
Exercice 6		/13
Total		/100

ATTENTION:

1. Vous ne pouvez sortir de la salle sans remettre définitivement votre copie ni sans autorisation.
2. Toute calculatrice et tout objet connecté (même éteint) sont formellement interdits. Les seuls documents autorisés sont ceux que nous vous fournissons.

Toute tentative de fraude ou de communication sera sévèrement sanctionnée.

1. Ecrivez immédiatement vos **nom, prénom et matricule** sur cette page.
2. Des feuilles de brouillon sont accessibles à la fin de la copie.
Vous n'avez pas le droit à vos propres feuilles de brouillon.
Les brouillons ne seront en aucun cas lus ni corrigés.
3. **Ne dégrafez pas** les feuilles !
4. Les réponses doivent être **soigneusement justifiées** sauf mention expresse du contraire.
5. Ecrivez lisiblement et soignez la présentation de vos réponses.
6. Vous pouvez écrire vos réponses **au verso des pages** et **au crayon** mais **pas en rouge**.
7. L'examen dure **3 heures**.

EXERCICE 1

- (a) (/3) Combien de mots peuvent être obtenus en réarrangeant les lettres du mot suivant ?

TARTEALABANANE

- (b) (/4) Quel est le coefficient du terme en x^5 dans le développement de $(x - 1)^{14}$?
- (c) (/3) Un tiroir contient 16 chaussettes rouges identiques, 34 chaussettes noires identiques et 10 chaussettes blanches identiques. Combien de chaussettes doit-on prendre au minimum (en piochant au hasard) pour être certain d'avoir une paire ?
- (d) (/4) De combien de manières peut-on répartir 9 objets indiscernables dans 6 boîtes numérotées ?
- (e) (/3) Classer les nombres obtenus aux questions (a), (b), (c) et (d) par ordre croissant.

Réponse question 1 :

(a) T : 2
A : 5
R : 1
E : 2
L : 1
B : 1
N : 2

On peut écrire

$$\frac{14!}{2! 5! 2! 2!}$$

$$= \frac{14!}{5! (2!)^3} = \frac{14!}{8 \cdot 5!} \text{ mots.}$$

Total : 14

Il s'agit de permutations avec répétitions.

Réponse question 1 (suite):

(b) Par la formule du Binôme de Newton

$$(x-1)^{14} = \sum_{k=0}^{14} \binom{14}{k} (-1)^{14-k} x^k \quad (\forall x \in \mathbb{R})$$

Le terme en x^5 correspond à $k=5$, il est donc

$$\binom{14}{5} (-1)^9 x^5, \text{ avec coefficient } -\binom{14}{5} = \frac{-14!}{9! 5!}.$$

(c) Comme il y a trois types de chaussettes différentes, pour avoir une paire, il faut en prendre plus de trois et donc 4.

(d) Le nombre de manières de répartir 9 objets indiscernables dans 6 boîtes numérotées est le nombre de codes contenant 9 0 et 6 1 avec comme premier caractère 1. Ceci correspond à choisir, parmi les $9+6-1$ places encore libres

après avoir placé le premier 1, les $6-1=5$ places des autres 1 (puis remplir avec les 0). On a donc un total de

$\binom{9+6-1}{6-1} = \binom{14}{5}$ manières de répartir les objets dans les boîtes.

(e) Nous avons obtenu, dans l'ordre,

$$A = \frac{14!}{8 \cdot 5!}, \quad B = \frac{-14!}{9! \cdot 5!}, \quad C = 4 \text{ et } D = \frac{14!}{9! \cdot 5!}$$

On a $B < 0$

$$8 < 9! \text{ donc } D = \frac{14!}{9! \cdot 5!} < \frac{14!}{8 \cdot 5!} = A$$

$$C = 4 < 14 \cdot 13 \cdot 11 = \frac{14!}{9! \cdot 5!} = D$$

donc

$$B < C < D < A.$$

EXERCICE 2

- (a) (/3) Enoncer la définition de la norme d'un vecteur de $\mathbb{R}^n$.
 (b) (/4) Enoncer l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
 (c) (/6) Calculer le produit scalaire ET le produit vectoriel des vecteurs $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
 (d) (/4) Ecrire l'équation *cartésienne* du plan Π contenant la droite d'équations paramétriques

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 + 3t \\ z = 1 + 4t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

et parallèle à la droite d'équations cartésiennes

$$x + 1 = 1 - y = z - 5.$$

Réponse question 2 :

(a) La norme d'un vecteur $\vec{v} = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ est la quantité

$$\|\vec{v}\| := \sqrt{\sum_{i=1}^n v_i^2} = \sqrt{v_1^2 + \dots + v_n^2}$$

(b) Inégalité de Cauchy-Schwarz :

Pour toute paire $\vec{a}$ et $\vec{b}$ de vecteurs dans $\mathbb{R}^n$,
 on a $|\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle| \leq \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\|$.

Réponse question 2 (suite) :

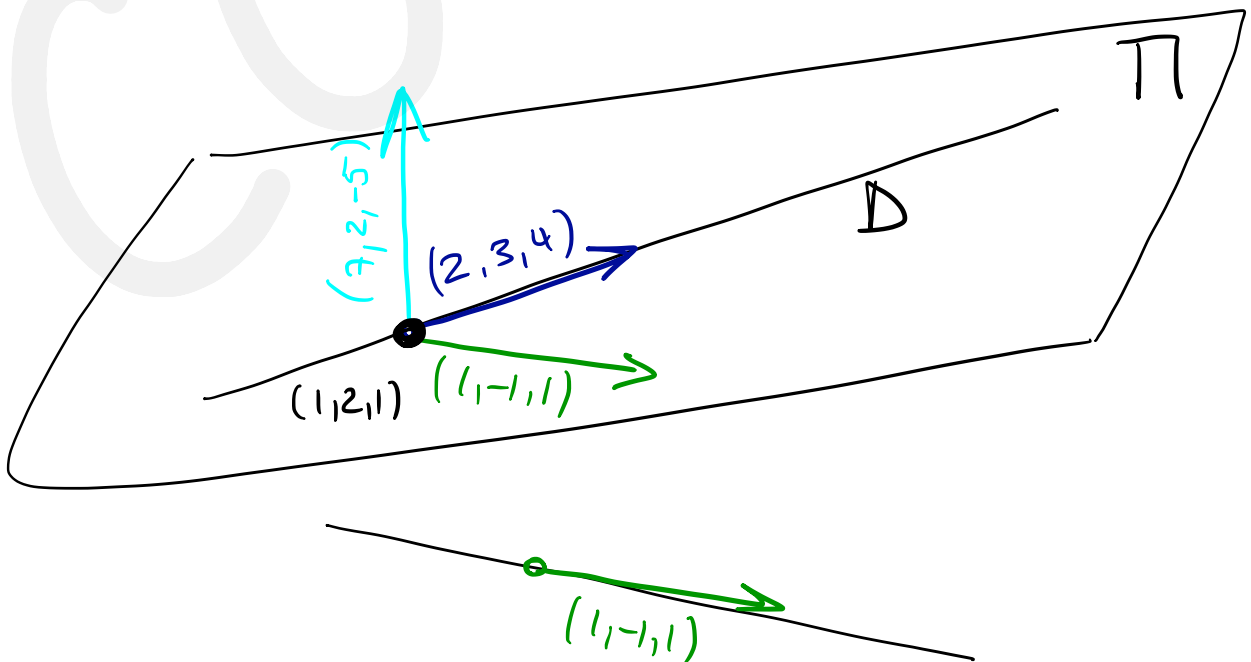
(c) Produit scalaire :

$$\left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = 2 \cdot 1 + 3 \cdot (-1) + 4 \cdot 1 \\ = 2 - 3 + 4 = 3$$

Produit vectoriel :

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 1 - 4 \cdot (-1) \\ -(2 \cdot 1 - 4 \cdot 1) \\ 2 \cdot (-1) - 3 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$$

(d)



Les vecteurs $(2, 3, 4)$ (vecteur directeur de la droite D d'équations $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 + 3t \\ z = 1 + 4t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$)

et $(1, -1, 1)$ (vecteur directeur de la droite d'équations $x+1 = 1-y = z-5$ ou $\frac{x+1}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-5}{1}$) sont directeur du plan Π .

Leur produit vectoriel $(7, 2, -5)$ (calculé en (c)) est donc normal au plan Π .

On a aussi

$(1, 2, 1) \in D \subseteq \Pi$. Donc

$$\Pi \equiv 7(x-1) + 2(y-2) - 5(z-1) = 0$$

ou, après simplification,

$$\Pi \equiv 7x + 2y - 5z = 6.$$

EXERCICE 3

- (a) (/5) Donner toutes les solutions de l'équation

$$\log_8(x^3) + \log_2(5-x) = \log_x(x^2).$$

- (b) (/5) Quel est l'ensemble de toutes les solutions réelles de l'équation suivante ?

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \cos(x) - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin(x) = 1$$

- (c) (/4) Soient les fonctions réelles
- $f(x) = 7x^3 - 1$
- et
- $h(x) = 3x - 1$
- .
-
- Quelle est la fonction réelle
- g
- telle que
- $f \circ g = h$
- ?

Réponse question 3 :

(a) Sous les conditions d'existence

($x^3 > 0 \Leftrightarrow x > 0$, $5-x > 0 \Leftrightarrow x < 5$, $x > 0$ et $x \neq 1$)
donc $0 < x < 5$ et $x \neq 1$, on a

$$\log_8(x^3) + \log_2(5-x) = \log_x(x^2)$$

$$\Leftrightarrow 3 \frac{\log_2 x}{\log_2 8} + \log_2(5-x) = 2$$

$$3 = \log_2 8$$

$$\Leftrightarrow \log_2 x + \log_2(5-x) = 2$$

$$\Leftrightarrow \log_2 x(5-x) = 2$$

$$\Leftrightarrow x(5-x) = 4$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 5x + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-4)(x-1) = 0$$

Réponse question 3 (suite) :

(=) $x = 4$ ou ~~$x = 1$~~
à rejeter puisque ne correspond pas aux conditions d'existence

La solution est $x = 4$.

$$(b) \quad \frac{\sqrt{2}}{2} \cos x - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin x = 1$$

$$(=) \quad \sin \frac{3\pi}{4} \cos x + \cos \frac{3\pi}{4} \sin x = 1$$

$$(=) \quad \sin \left(x + \frac{3\pi}{4} \right) = 1$$

$$(=) \quad x + \frac{3\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$(=) \quad x = \frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{4} + 2k\pi = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$$

L'ensemble des solutions est

$$\left\{ -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$$

(c) On a $f \circ g(x) = 7(g(x))^3 - 1$

et $f \circ g = h$

$(\Rightarrow) f \circ g(x) = h(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$(\Rightarrow) 7(g(x))^3 - 1 = 3x - 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$(\Rightarrow) (g(x))^3 = \frac{3}{7}x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$(\Rightarrow) g(x) = \sqrt[3]{\frac{3}{7}x} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

La fonction est

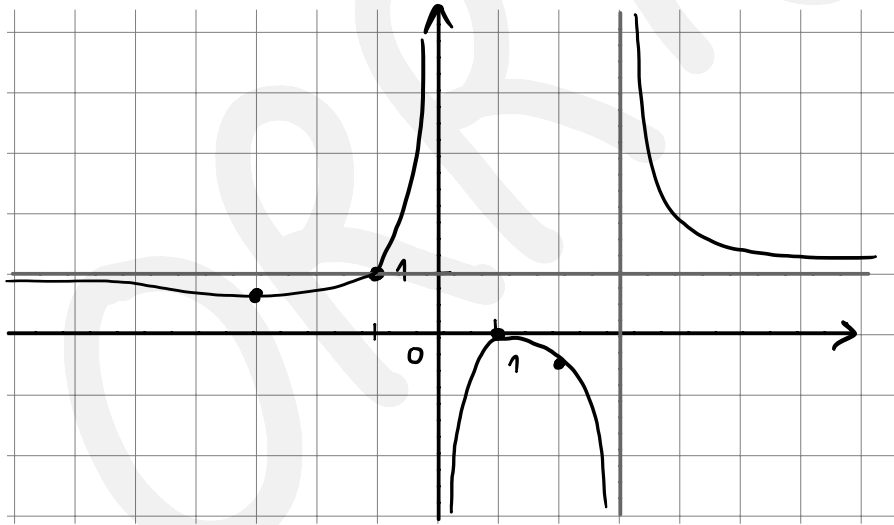
$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \sqrt[3]{\frac{3}{7}x}$

EXERCICE 4

Considérer la fonction réelle suivante.

$$f(x) = \frac{(x-1)^2}{x^2-3x}$$

- (a) (/3) Déterminer le (plus grand) domaine de f .
- (b) (/6) Donner la dérivée f' de f sur son domaine ainsi que le tableau de variation de f (en y indiquant les extrema locaux éventuels, avec leurs natures).
- (c) (/5) Déterminer toutes les asymptotes de f .
- (d) (/3) Le graphe de f coupe l'une de ses asymptotes en un point p . Déterminer les coordonnées de ce point d'intersection p .
- (e) (/3) Tracer le graphe de f sur le repère fourni.



Réponse question 4 :

$$(a) x \in \text{dom } f \Leftrightarrow x^2 - 3x \neq 0 \Leftrightarrow x(x-3) \neq 0$$

$$\Leftrightarrow x \neq 0 \text{ et } x \neq 3$$

$$\text{dom } f = \mathbb{R} \setminus \{0, 3\}$$

Réponse question 4 (suite) : $(x-1)(2x^2-5x+3)$

$$\begin{aligned}
 (b) \quad f'(x) &= \frac{2(x-1)(x^2-3x) - \overbrace{(x-1)^2(2x-3)}}{(x^2-3x)^2} \\
 &= \frac{(x-1) [2x^2-6x - 2x^2+5x-3]}{(x^2-3x)^2} \\
 &= - \frac{(x-1)(x+3)}{x^2(x-3)^2}
 \end{aligned}$$

Tableau de variation :

x	-3			0	1	3					
$x-1$	-	-	-			-	0	+			+
$x+3$	-	0	+			+	+	+			+
f'	-	0	+	/	+	0	-	/	-		
f	$\swarrow$ minimum			$\nearrow$ maximum			$\searrow$			$\searrow$	

extrema

$$f(-3) = \frac{(-3-1)^2}{(-3)^2-3(-3)} = \frac{16}{18} = \frac{8}{9}$$

$f(1) = 0$

(ε) On a

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ \leq}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ \leq}} \frac{(x-1)^2}{x^2-3x} = +\infty$$

donc une asymptote verticale en $x=0$

On a

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ \geq}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ \geq}} \frac{(x-1)^2}{x^2-3x} = +\infty$$

donc une asymptote verticale en $x=3$

Finalement, on a $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)$

$$= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2-2x+1}{x^2-3x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}}{1 - \frac{3}{x}} = \frac{1-0+0}{1-0} = 1$$

et donc une asymptote horizontale en $y=1$,

autant en $-\infty$ qu'en $+\infty$ (de sorte qu'on ne peut pas avoir d'asymptote oblique, ni à gauche, ni à droite).

(d) Le graphe de f croise son asymptote d'équation $y = 1$ en $x = -1$:

$$f(x) = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-1)^2}{x^2-3x} = 1 \quad \Leftrightarrow x^2-2x+1 = x^2-3x$$

$$\Leftrightarrow x+1=0 \quad \Leftrightarrow x=-1$$

Coordonnées du point d'intersection : $(-1, 1)$.

(e) voir graphe

EXERCICE 5

- (a) (/9) Énoncer et démontrer le Théorème de Rolle.
 (b) (/10) Démontrer par récurrence que

$$\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}_0$.

Réponse question 5 :

(a) Théorème de Rolle :

Soit f une fonction

→ continue sur un intervalle $[a, b]$

→ dérivable sur $]a, b[$

Si $f(a) = f(b)$ alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Démonstration :

f est continue sur un intervalle fermé $[a, b]$, elle atteint donc un minimum $f(u)$ en $u \in [a, b]$ et un maximum $f(v)$ en $v \in [a, b]$.

Si u et v sont a et b alors $f(u) = f(a) = f(b) = f(v)$ et f est constante. Donc $f'(x) = 0 \quad \forall x \in]a, b[$.

Sinon on a $u \in]a, b[$ ou $v \in]a, b[$ donc f atteint un extremum à l'intérieur de son domaine, point auquel sa dérivée est nulle.

Réponse question 5 (suite) :

(b) Cas de base : Pour $n=1$, on a bien

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

puisque

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1 \cdot 2} = \frac{1}{2}$$

$$\text{et } 1 - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Si $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}$ pour un $n \in \mathbb{N}_0$

(hypothèse de récurrence) alors (étape de récurrence)

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \left(\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} \right) + \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

$$= 1 - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

$$= 1 - \frac{n+2-1}{(n+1)(n+2)}$$

$$= 1 - \frac{n+1}{(n+1)(n+2)} = 1 - \frac{1}{n+2}$$

$$= 1 - \frac{1}{(n+1)+1}$$

ce qui conclut notre argument par récurrence

EXERCICE 6

- (a) (/6) Donner le développement de Taylor d'ordre 3 de la fonction $f(x) = \sin(x)$ au voisinage de $\frac{\pi}{3}$.
- (b) (/7) Calculer $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos(x) dx$.

Réponse question 6 :

$$(a) \quad f(x) = \sin x \Rightarrow f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$f'(x) = \cos x \Rightarrow f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

$$f''(x) = -\sin x \Rightarrow f''\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$f'''(x) = -\cos x \Rightarrow f'''\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$$

Le développement de Taylor d'ordre 3 de la fonction f autour de $\frac{\pi}{3}$ est

$$\begin{aligned} T_{f,4,\frac{\pi}{3}}(x) &= \sum_{k=0}^3 \frac{f^{(k)}\left(\frac{\pi}{3}\right)}{k!} \left(x - \frac{\pi}{3}\right)^k \\ &= f\left(\frac{\pi}{3}\right) + f'\left(\frac{\pi}{3}\right)\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + \frac{f''\left(\frac{\pi}{3}\right)}{2} \left(x - \frac{\pi}{3}\right)^2 + \frac{f'''\left(\frac{\pi}{3}\right)}{6} \left(x - \frac{\pi}{3}\right)^3 \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \left(x - \frac{\pi}{3}\right) - \frac{\sqrt{3}}{4} \left(x - \frac{\pi}{3}\right)^2 - \frac{1}{12} \left(x - \frac{\pi}{3}\right)^3 \end{aligned}$$

Réponse question 6 (suite) :

$$(b) \quad I = \int e^x \cos x \, dx$$

$$u = e^x \Rightarrow u' = e^x$$

$$v = \cos x \Rightarrow v' = -\sin x$$

$$I = e^x \cos x + \int e^x \sin x \, dx$$

$$f = e^x \Rightarrow f' = e^x$$

$$g = \sin x \Rightarrow g' = \cos x$$

$$= e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \cos x \, dx$$

$$= e^x \cos x + e^x \sin x - I$$

$$\Rightarrow \underline{I} = \frac{1}{2} e^x \cos x + \frac{1}{2} e^x \sin x$$

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x \, dx &= \frac{1}{2} \left[e^x \cos x + e^x \sin x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\&= \frac{1}{2} \left(e^{\frac{\pi}{2}} - e^0 \right) \\&= \frac{1}{2} (e^{\frac{\pi}{2}} - 1)\end{aligned}$$