



Ex cathedra

⑫

13.5. Le mouvement d'un point $p = (x, y)$

dans le plan euclidien $\mathbb{R}^2$

est donné en fonction du temps t

par

$$\begin{cases} x = 2 + 3 \cos 3t, \\ y = -1 + 6 \sin 3t. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2 + 3 \cos 3t, \\ y = -1 + 6 \sin 3t. \end{cases}$$

Au temps $t=0$, le point
se trouve en $(x(0), y(0))$
 $= (5, -1)$

$$\begin{cases} x = 2 + 3 \cos 3t, \\ y = -1 + 6 \sin 3t. \end{cases}$$

Au temps $t = \frac{\pi}{6}$, le point se trouve en $(x(\frac{\pi}{6}), y(\frac{\pi}{6})) = (2, 5)$

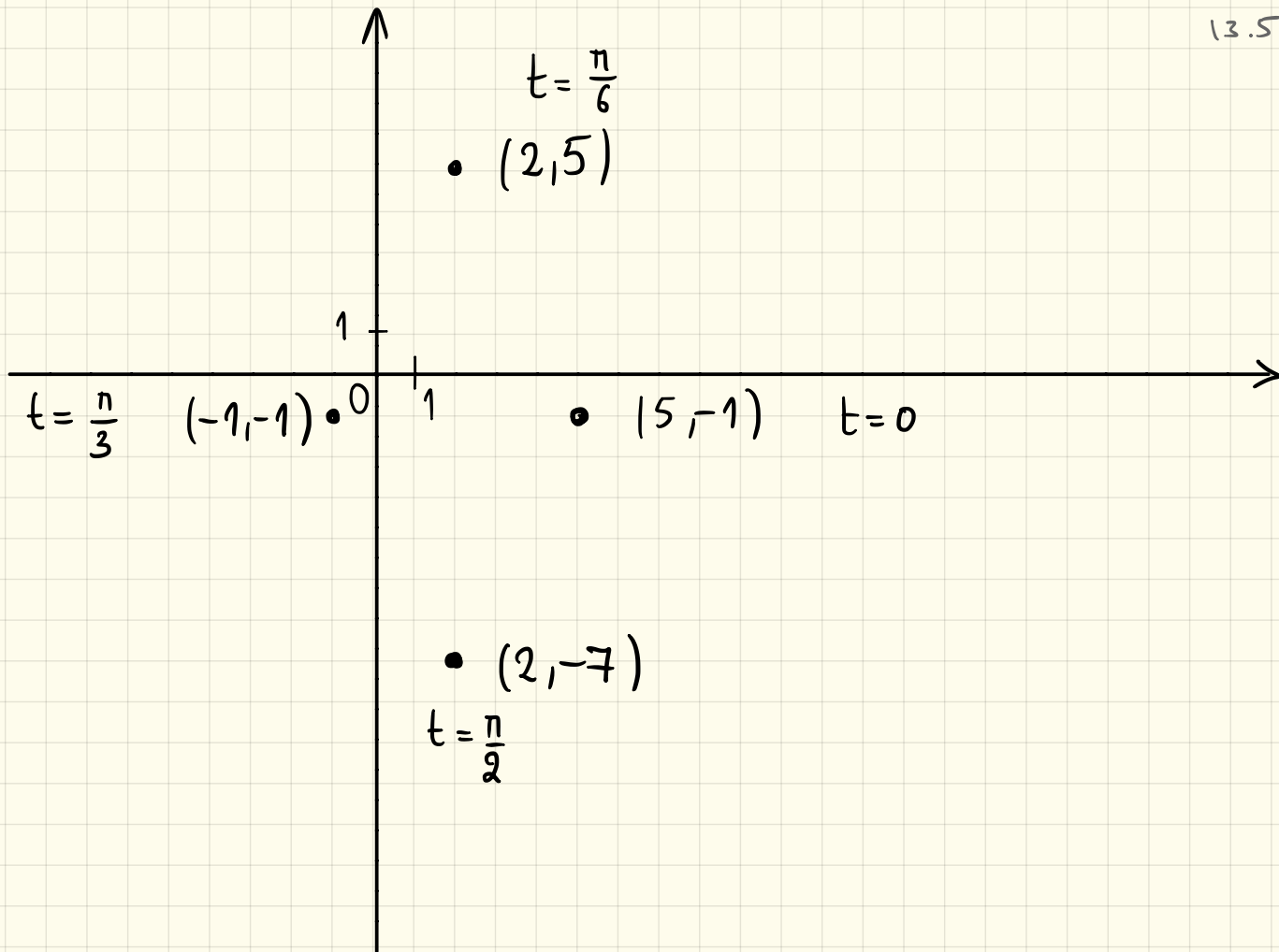
$$\begin{cases} x = 2 + 3 \cos 3t, \\ y = -1 + 6 \sin 3t. \end{cases}$$

Au temps $t = \frac{\pi}{3}$, le point
se trouve en $(x(\frac{\pi}{3}), y(\frac{\pi}{3}))$
 $= (-1, -1)$

$$\begin{cases} x = 2 + 3 \cos 3t, \\ y = -1 + 6 \sin 3t. \end{cases}$$

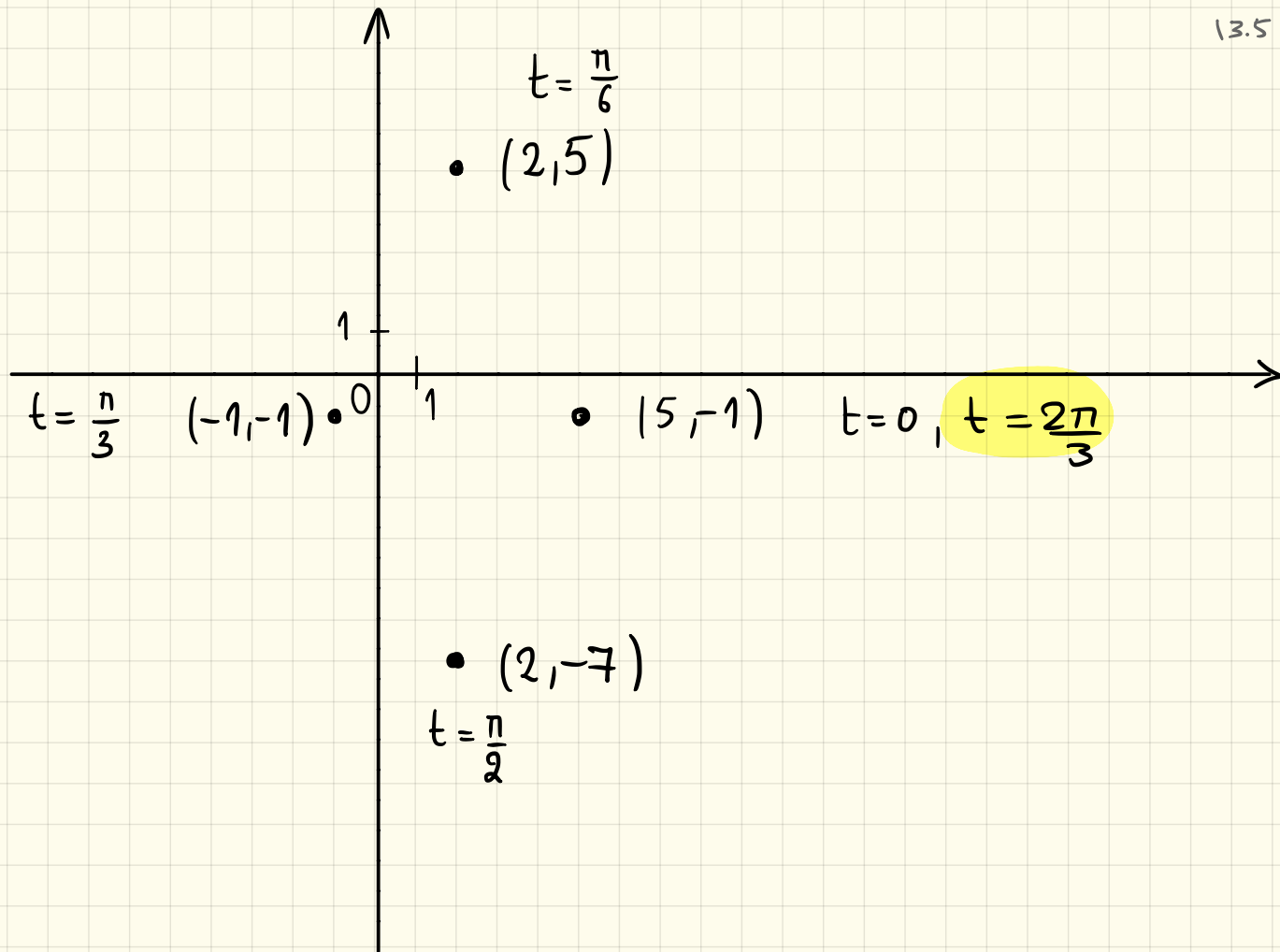
Au temps $t = \frac{\pi}{2}$, le point se trouve en $(x(\frac{\pi}{2}), y(\frac{\pi}{2})) = (2, -7)$.

etc.



$$\begin{cases} x = 2 + 3 \cos 3t, \\ y = -1 + 6 \sin 3t. \end{cases}$$

Au temps $t = \frac{2\pi}{3}$, le point se trouve en $(x(\frac{2\pi}{3}), y(\frac{2\pi}{3})) = (5, -1)$



a. Ce mouvement est-il périodique ?

Si oui, quelle est sa période ?

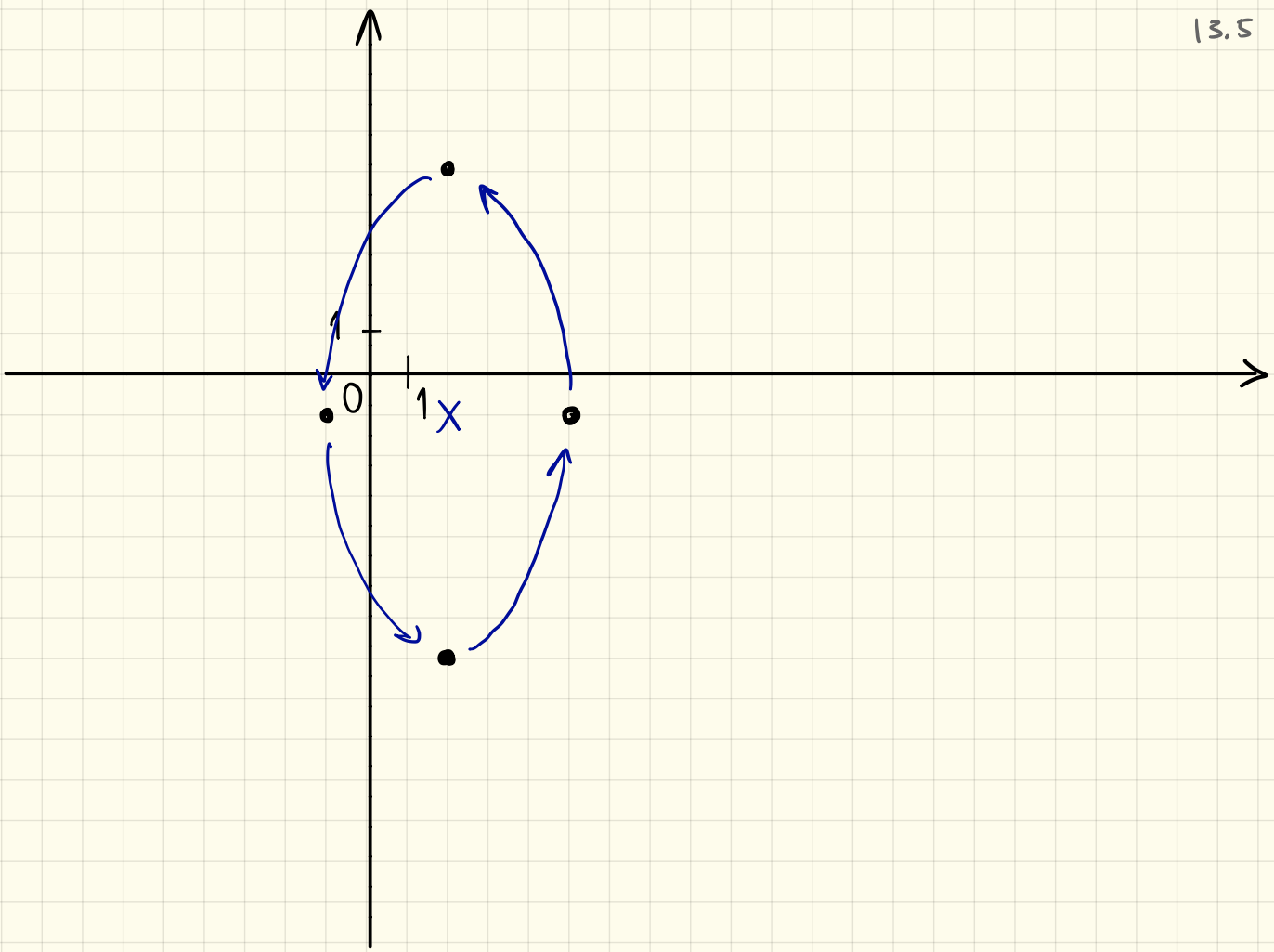
Le mouvement est périodique de période $\frac{2\pi}{3}$, c'est ce qu'on vient de constater :

$$\left\{ \begin{array}{l} x = 2 + 3 \cos 3t \\ y = -1 + 6 \sin 3t \end{array} \right.$$

$\cos$ et $\sin$ sont de période 2π , ces fonctions sont donc de période $\frac{2\pi}{3}$

b. En éliminant le paramètre t ,
trouver une équation satisfaite par
toutes les positions prises
par le point au cours du temps.

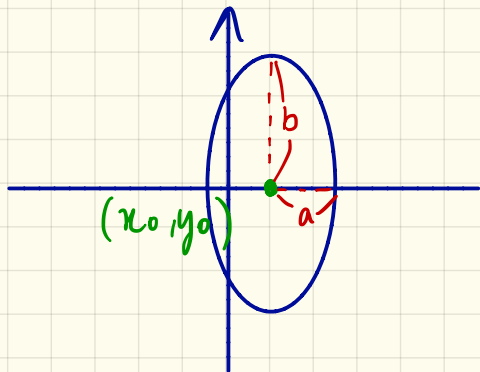
Ces positions forment la trajectoire du point ;
décrivez géométriquement cette
trajectoire.



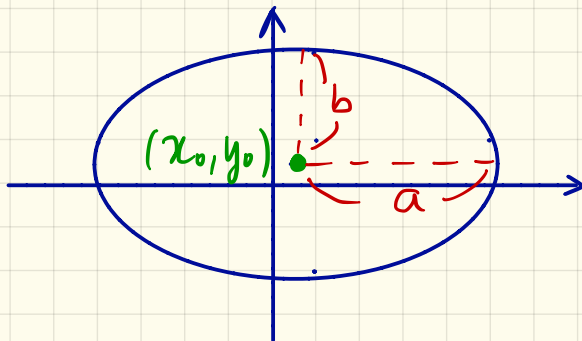
Les équations d'ellipses :

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1 \quad (a, b \in \mathbb{R}_0^+)$$

Verticale ($b > a$)



Horizontale ($a > b$)



(Si $a = b$, on a

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{a^2} = 1$$

donc $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = a^2$;
c'est un cercle }

$$\begin{cases} x = 2 + 3 \cos 3t, \\ y = -1 + 6 \sin 3t. \end{cases}$$

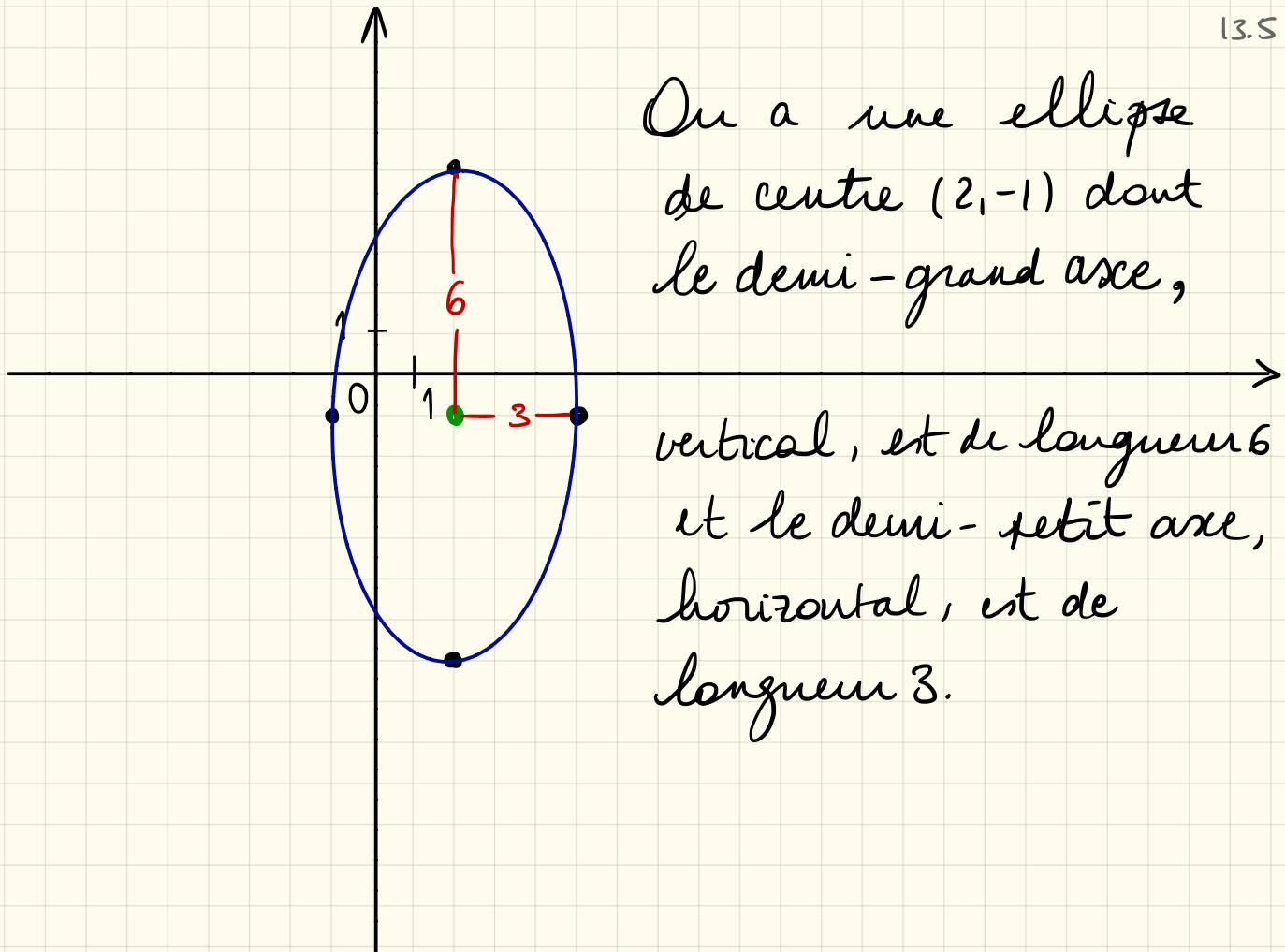
$$\cos 3t = \frac{x-2}{3}$$

$$\sin 3t = \frac{y+1}{6}$$

$$\cos 3t = \frac{x-2}{3} \quad , \quad \sin 3t = \frac{y+1}{6} \quad 13.5$$

$$\begin{aligned} 1 &= \cos^2 3t + \sin^2 3t \\ &= \frac{(x-2)^2}{3^2} + \frac{(y+1)^2}{6^2} \end{aligned}$$

On a une ellipse
de centre $(2, -1)$ dont
le demi-grand axe,



vertical, est de longueur 6
et le demi-petit axe,
horizontal, est de
longueur 3.

c. Quel est le vecteur vitesse ?

$$\begin{aligned} v(t) &= (x'(t), y'(t)) \\ &= (-9 \sin 3t, 18 \cos 3t) \end{aligned}$$

$$\begin{cases} x = 2 + 3 \cos 3t, \\ y = -1 + 6 \sin 3t. \end{cases}$$

$$v(t) = (-g \sin 3t, 18 \cos 3t)$$

pour $t = 0$?

$$v(0) = (0, 18)$$

pour $t = \frac{\pi}{20}$?

$$v\left(\frac{\pi}{20}\right) = \left(-g \sin \frac{3\pi}{20}, 18 \cos \frac{3\pi}{20}\right)$$

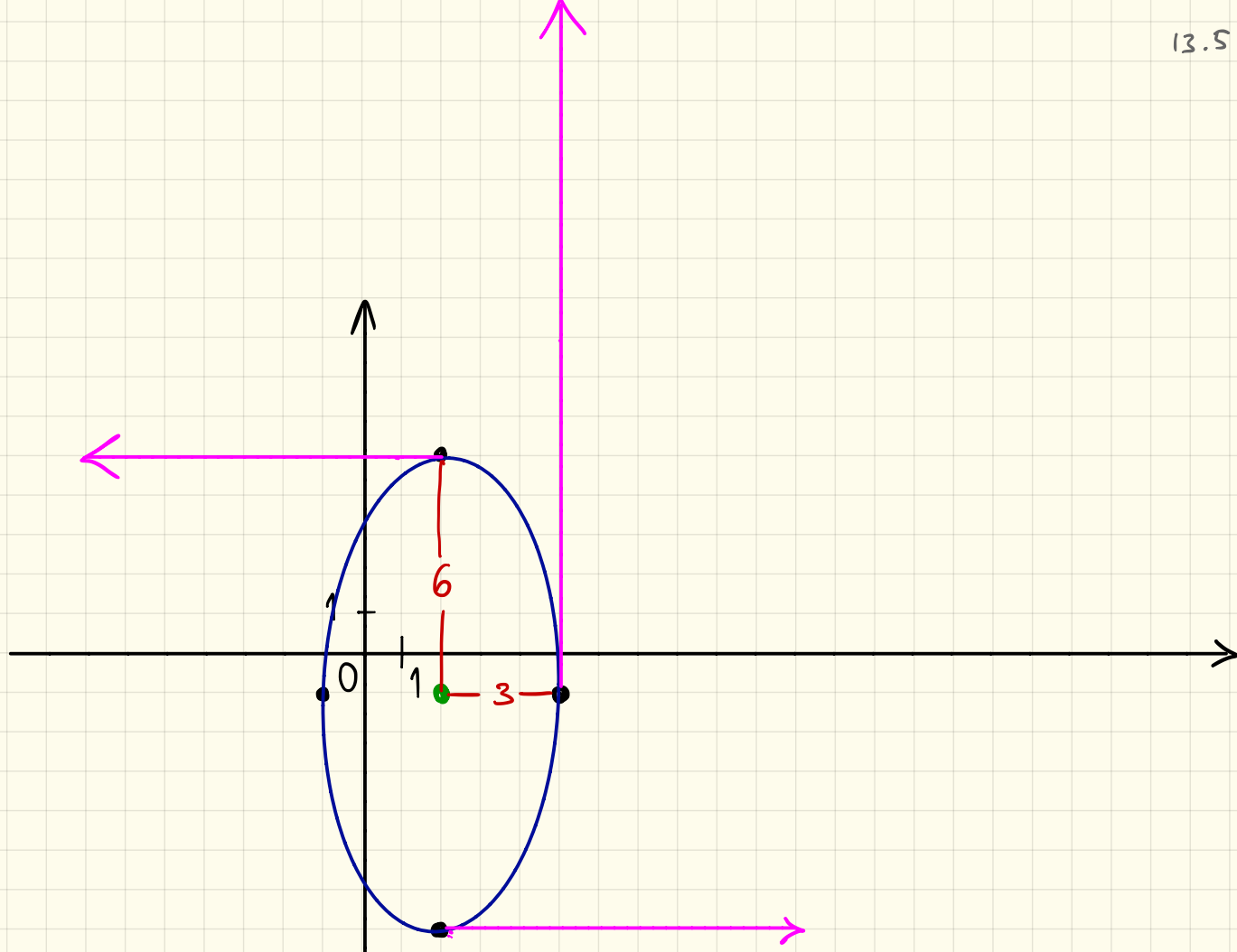
- d. Faites, dans le systèmes d'axes, le schéma de la trajectoire. Dessinez quelques vecteurs vitesse.

$$v(t) = (-g \sin 3t, 18 \cos 3t)$$

$$v(0) = (0, 18)$$

$$v\left(\frac{\pi}{6}\right) = (-g, 0)$$

$$v\left(\frac{\pi}{2}\right) = (g, 0)$$



e. Le point progresse-t-il
constamment à la même allure
sur sa trajectoire ?

Les vecteurs vitesse n'ont pas
toutes la même norme donc
non.

f. Quel est le vecteur accélération à l'instant t ?

$$\begin{aligned} a(t) &= (x''(t), y''(t)) \\ &= (-9 \sin 3t, (18 \cos 3t)') \\ &= (-27 \cos 3t, -54 \sin 3t). \end{aligned}$$

$$v(t) = (-9 \sin 3t, 18 \cos 3t)$$

g. Ce vecteur accélération est-il de norme constante ?

est-il toujours orthogonal à la trajectoire du point considéré ?

$$a(t) = (-27 \cos 3t, -54 \sin 3t)$$

$$\begin{aligned} \|a(t)\| &= \sqrt{(-27 \cos 3t)^2 + (-54 \sin 3t)^2} \\ &= \sqrt{27^2 \cos^2 3t + 54^2 \sin^2 3t} \\ &= \sqrt{27^2 \cos^2 3t + 4 \cdot 27^2 \sin^2 3t} \end{aligned}$$

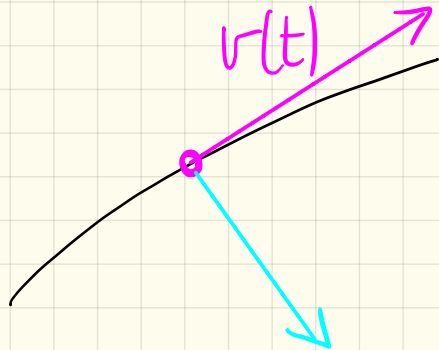
$$\begin{aligned}
 &= \sqrt{27^2(\cos^2 3t + \sin^2 3t) + 3 \cdot 27^2 \sin^2 3t} \quad 13.5 \\
 &= \sqrt{27^2 + 3 \cdot 27^2 \sin^2 3t}
 \end{aligned}$$

Pour $t=0$, on a $\|a(0)\| = 27$

Pour $t=\frac{\pi}{6}$, on a $\|a(\frac{\pi}{6})\| = 54$

Donc $\|a(t)\|$ n'est pas constant.

Orthogonal à la trajectoire?



Orthogonal au vecteur vitesse.

$$v(t) = (-9 \sin 3t, 18 \cos 3t)$$

13.5

$$a(t) = (-27 \cos 3t, -54 \sin 3t)$$

$$\langle v(t), a(t) \rangle$$

$$= (-9 \sin 3t)(-27 \cos 3t) + (18 \cos 3t)(-54 \sin 3t)$$

$$= 243 \sin 3t \cos 3t - 972 \sin 3t \cos 3t$$

$$= -729 \sin 3t \cos 3t$$

Pour $t = \frac{\pi}{12}$, on a

$$-729 \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{729}{2}$$

Comme le produit scalaire est non-nul, les vecteurs ne sont pas orthogonaux.

13.7. Soit C la courbe paramétrée du plan $\mathbb{R}^2$ définie par

$$\begin{cases} x = e^{2t} \cos(t^2) \\ y = e^{2t} \sin(t^2) \end{cases}$$

a. Le point $(1, 0)$ est-il un point de C ?

si oui, est-il un point multiple de C ?

Existe-t-il $t \in \mathbb{R}$ tel que

$$\begin{cases} x = e^{2t} \cos(t^2) = 1 \\ y = e^{2t} \sin(t^2) = 0 \end{cases} \quad ?$$

Plusieurs ?

$$\begin{cases} e^{2t} \cos(t^2) = 1 & (1) \\ e^{2t} \sin(t^2) = 0 & (2) \end{cases}$$

$$(1)^2 + (2)^2 : e^{4t} \cos^2(t^2) + e^{4t} \sin^2(t^2) = 1$$

$$\Rightarrow e^{4t} (\cos^2(t^2) + \sin^2(t^2)) = 1$$

$$\Rightarrow e^{4t} = 1$$

$$\Rightarrow 4t = 0$$

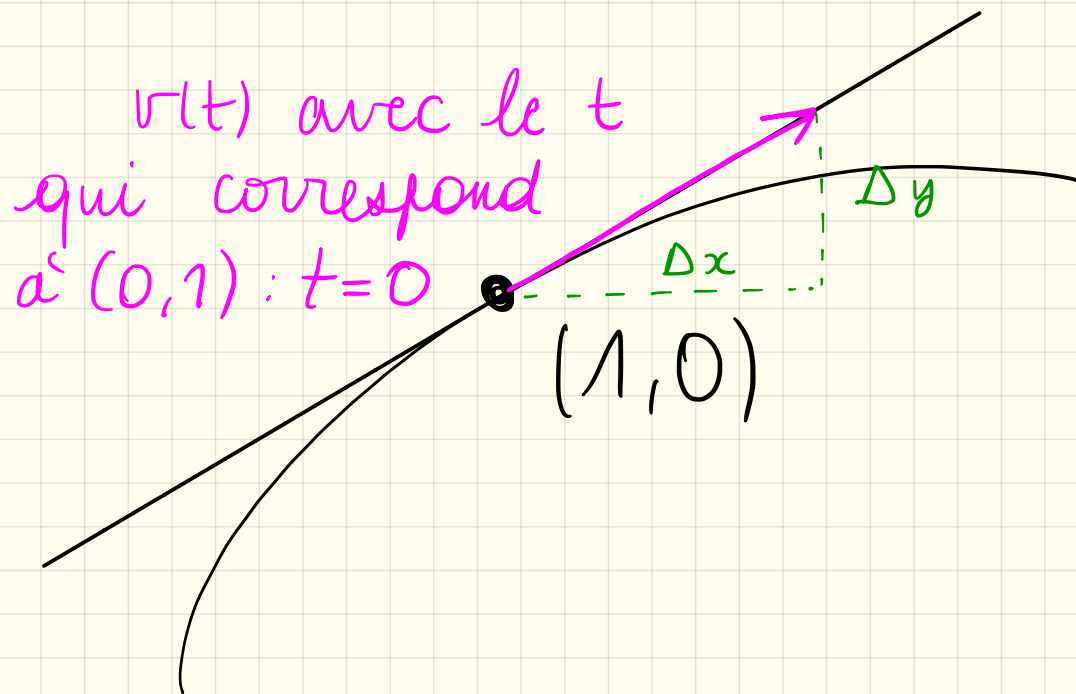
$$\Rightarrow t = 0$$

Il n'y a
qu'une seule
solution pour t

b.

13.7

Donner l'équation de la tangente à la courbe au point $(1,0)$.



$$v(t) = (2e^{2t} \cos(t^2) - 2te^{2t} \sin(t^2), 2e^{2t} \sin(t^2) + 2te^{2t} \cos(t^2))$$

$$v(0) = (2, 0)$$

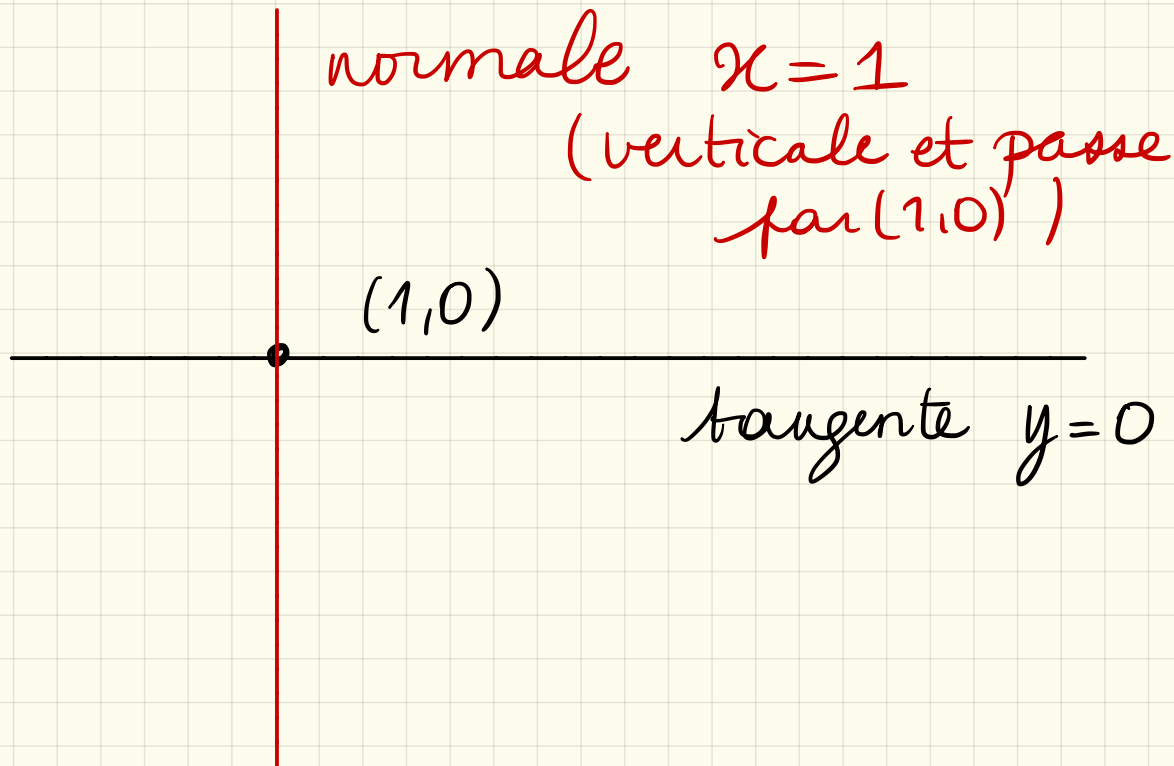
Droite horizontale, pente 0

Cette droite passe par $(1, 0)$ donc son équation est $y=0$.

$$\begin{cases} x = e^{2t} \cos(t^2) \\ y = e^{2t} \sin(t^2) \end{cases}$$

$\mathcal{L}_0$

Donner l'équation de la normale à la courbe au point $(1,0)$.



13.14. Considérons la courbe paramétrée C de $\mathbb{R}^3$ d'équations paramétriques

$$\begin{cases} x = t^2, \\ y = t^3, \\ z = t^4. \end{cases}$$

a. Cette courbe paramétrée C possède-t-elle des points doubles ?

NON

Existe-t-il $t_1 \neq t_2 \in \mathbb{R}$ tels
que

$$t_1^2 = t_2^2 \quad (1)$$

$$t_1^3 = t_2^3 \quad (2)$$

$$t_1^4 = t_2^4 \quad (3)$$

?

NON :

(1) $\Rightarrow t_1 = t_2$ ou $t_1 = -t_2$

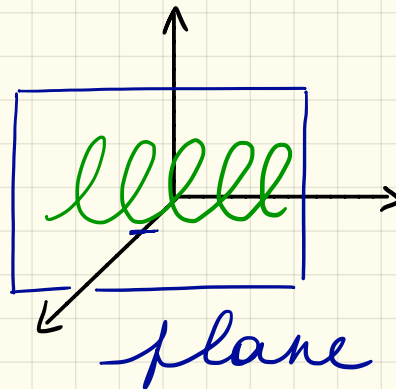
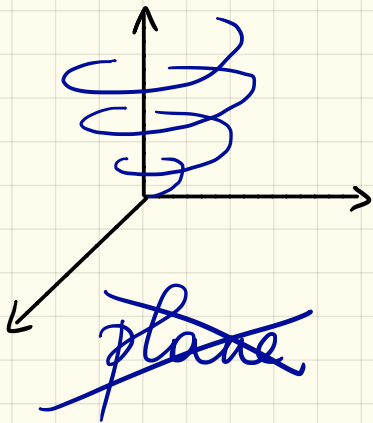
Comme $t_1 \neq t_2$, $t_1 = -t_2$.

Mais alors $t_1^3 = (-t_2)^3 = -t_2^3$

ce qui contredit (2).

$$\begin{cases} x = t^2, \\ y = t^3, \\ z = t^4. \end{cases}$$

b. Cette courbe C est-elle plane ?

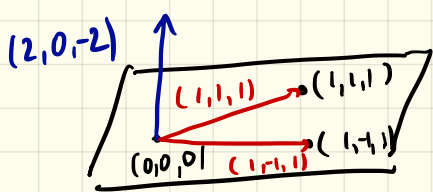


On prend plusieurs points de la courbe et on regarde si on peut les visualiser dans le même plan :

$$\left. \begin{array}{l} t=0: (0, 0, 0) \\ t=1: (1, 1, 1) \\ t=-1: (1, -1, 1) \\ t=2: (4, 8, 16) \end{array} \right\}$$

Les 3 points sont tous dans un même plan (il n'y a qu'un seul tel plan).

Cherchons son équation :



$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Vecteur normal : $(1, 0, -1)$

Pont : $(0, 0, 0)$:

$$1(x-0) + 0(y-0) - 1(z-0) = 0$$

$$\Leftrightarrow x - z = 0.$$

Comme $(4, 8, 16)$ n'appartient pas au plan d'équation $x - z = 0$ (qui est le seul qui contient $(0, 0, 0)$, $(1, 1, 1)$ et $(1, -1, 1)$), les 4 points ne peuvent pas s'inscrire dans un même plan.

Le courbe n'est pas plane.

c. Montrer que C est située sur la surface d'équation $z = x^2$.

$$(x(t))^2 = (t^2)^2 = t^4 = z(t).$$

$$\begin{cases} x = t^2, \\ y = t^3, \\ z = t^4. \end{cases}$$

d. Donner des équations de la tangente à C au point $(1, 1, 1)$.

vecteur vitesse



$$v(t) = (2t, 3t^2, 4t^3)$$

$$v(1) = (2, 3, 4)$$

correspond
à $t = 1$

$$\begin{cases} x = t^2, \\ y = t^3, \\ z = t^4. \end{cases}$$

Vecteur directeur :

$(2, 3, 4)$

Point :

$(1, 1, 1)$

Equations cartésiennes :

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-1}{4}$$

Vecteur directeur :

$(2, 3, 4)$

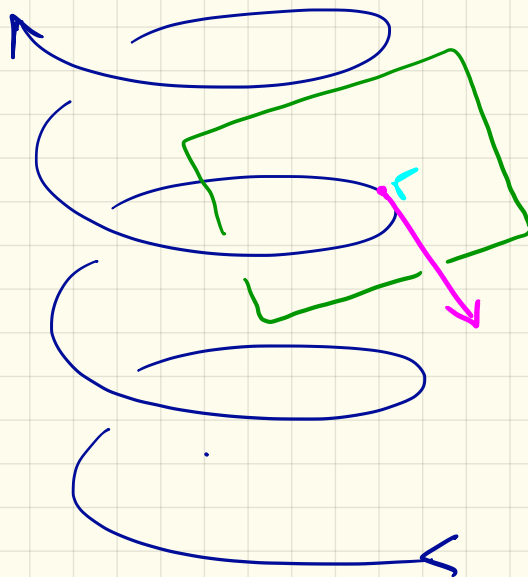
Point :

$(1, 1, 1)$

Equations paramétriques:

$$\begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 1 + 3\lambda \\ z = 1 + 4\lambda \end{cases} \quad (\lambda \in \mathbb{R})$$

e. Donner l'équation du plan normal à C au point $(1, 1, 1)$.



Vector normal:

$(2, 3, 4)$

Point:

$(1, 1, 1)$

Equation cartésienne:

$$2(x-1) + 3(y-1) + 4(z-1) = 0$$

$$2x + 3y + 4z - 9 = 0$$

13.20. Calculer la longueur du chemin conduisant du point $(1, -1)$ au point $(1, 1)$ le long de la courbe de $\mathbb{R}^2$ d'équation

$$y^2 = x^3.$$

La longueur de la
courbe paramétrée par

$$[a, b] \longrightarrow \text{ou } \begin{matrix} \mathbb{R}^2 \\ \mathbb{R}^3 \end{matrix}$$

$$t \longmapsto \left[\begin{matrix} (x(t), y(t)) \\ \text{ou} \\ (x(t), y(t), z(t)) \end{matrix} \right] \gamma(t)$$

est donnée par

$$\int_a^b \|\gamma'(t)\| dt$$

Ici on a uniquement
 $y^2 = x^3$

① On paramétrise la courbe

$$x = t^2$$

$$\rightarrow x^3 = t^6$$

$$\rightarrow y = t^3 \text{ pour faire } y^2 = t^6$$

$$\gamma(t) = (t^2, t^3)$$

② On détermine les bornes :

$(1, -1)$ correspond à $t = -1$

$(1, 1)$ correspond à $t = 1$

$$\gamma : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$$
$$t \mapsto (t^2, t^3)$$

$$\gamma(t) = (t^2, t^3)$$

$$\gamma'(t) = (2t, 3t^2)$$

$$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{4t^2 + 9t^4}$$

$$\int_{-1}^1 \sqrt{4t^2 + 9t^4} dt = \int_{-1}^1 \sqrt{t^2(4 + 9t^2)} dt$$

$$= \int_{-1}^1 \underbrace{\sqrt{t^2}}_{|t|} \sqrt{4 + 9t^2} dt = \int_{-1}^1 |t| \sqrt{4 + 9t^2} dt$$

$$= \int_{-1}^0 \underbrace{|t|}_{=-t} \sqrt{4 + 9t^2} dt + \int_0^1 \underbrace{|t|}_{=t} \sqrt{4 + 9t^2} dt$$

$$= - \int_{-1}^0 t \sqrt{4+9t^2} dt + \int_0^1 t \sqrt{4+9t^2} dt$$

$$\int t \sqrt{4+9t^2} dt = \checkmark \quad \frac{1}{18} \int \underbrace{\sqrt{u}}_{u^{\frac{1}{2}}} \underbrace{du}_{} \\ u = 4+9t^2 \\ du = \underline{18} t dt$$

$$= \cancel{9} \frac{1}{\cancel{18}} \cdot \frac{2}{3} \underbrace{u^{\frac{3}{2}}}_{\frac{3}{2}} + \text{const}$$

$$= \frac{1}{27} \cdot (4+9t^2)^{\frac{3}{2}} + \text{const}$$

$$= - \left[\frac{1}{27} (4+9t^2)^{\frac{3}{2}} \right]_{-1}^0 + \left[\frac{1}{27} (4+9t^2)^{\frac{3}{2}} \right]_0^1$$

$$= - \left[\frac{1}{27} (4 + 9t^4)^{\frac{3}{2}} \right]_{-1}^0 + \left[\frac{1}{27} (4 + 9t^4)^{\frac{3}{2}} \right]_0^1$$

$$= - \left(\frac{8}{27} - \frac{13^{\frac{3}{2}}}{27} \right) + \left(\frac{13^{\frac{3}{2}}}{27} - \frac{8}{27} \right)$$

$$= -\frac{8}{27} + \frac{13^{\frac{3}{2}}}{27} + \frac{13^{\frac{3}{2}}}{27} - \frac{8}{27}$$

$$= \frac{26\sqrt{13} - 16}{27}$$