

B-IRBI-1 – B-BIOL-1 – B-CHIM-1 – B-GEOL-1 – B-GEOG-1
MATH-F-118/119
EXAMEN DU 10 JANVIER 2024

NOM : **Prénom :** **Matricule :** **Section :**

Consignes :

- L'examen commence à 13h et dure jusqu'à 17h, si vous vous asseyez et recevez une feuille d'énoncés, vous devez rester assis jusqu'à 14h.
 - Il y a 2 parties : une partie avec des questions à choix multiples (QCM) et une partie avec des questions ouvertes.
 - Il y a deux feuilles de brouillon en fin de questionnaire, vous pouvez aussi utiliser cette feuille-ci comme brouillon, ainsi que les verso du questionnaire QCM.
 - Notez vos NOMS, PRÉNOMS, MATRICULE et SECTION sur toutes les pages.
 - Ne dégrafez pas les feuilles (à l'exception des feuilles intitulées "Brouillon" en fin de questionnaire).
 - Aucun document autorisé, pas d'objet connecté, pas de calculatrice.
-

NOM :

Prénom :

Matricule :

Section :

Partie I : QCM

Consignes :

- Cette partie contient uniquement des questions à choix multiples.
Elle vaut pour 4 points sur 20.
 - Aucun document autorisé, pas d'objet connecté, pas de calculatrice.
 - Pour vos brouillons, vous pouvez aussi utiliser les verso des feuilles de questions de type QCM.
 - Cochez, barrez ou entourez **clairement** la bonne réponse dans les cadres ci-dessous.
N'UTILISEZ PAS DE FLUO!
En cas de doute, le correcteur mettra un 0 à la question.
-

Question 1:	A	B	C	D	E	F
Question 2:	A	B	C	D	E	F
Question 3:	A	B	C	D	E	F
Question 4:	A	B	C	D	E	F
Question 5:	A	B	C	D	E	F
Question 6:	A	B	C	D	E	F
Question 7:	A	B	C	D	E	F
Question 8:	A	B	C	D	E	F

1. La somme

$$\sum_{k=1}^{100} (2k - 1)$$

vaut :

A. 5050

B. 19900

C. 2500

D. 10000

E. 1125

F. 9950

2. Laquelle des équations suivantes a $S = \left\{ \theta \in \mathbb{R} \mid \theta = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$ comme ensemble de toutes ses solutions ?

A. $\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1$

B. $\cos(\theta) + \sin(\theta) = \sqrt{2}$

C. $\tan^2(\theta) + \cot^2(\theta) = 0$

D. $\tan^2(\theta) = 1$

E. $\cos(\theta) = \sin(\theta)$

F. $2 \cos(\theta) \sin(\theta) = 1$

3. Quelle est la négation de la proposition logique suivante ?

$$\forall \epsilon > 0, \exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R} : x \geq M \vee f(x) \leq \epsilon$$

A. $\forall \epsilon > 0, \forall M \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R} : x < M \wedge f(x) > \epsilon$

B. $\forall \epsilon > 0, \exists M \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R} : x < M \wedge f(x) > \epsilon$

C. $\exists \epsilon \leq 0, \forall M \notin \mathbb{R}, \exists x \notin \mathbb{R} : x < M \wedge f(x) > \epsilon$

D. $\exists \epsilon > 0, \forall M \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R} : x < M \vee f(x) > \epsilon$

E. $\exists \epsilon > 0, \forall M \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R} : x < M \wedge f(x) > \epsilon$

F. Aucune des autres propositions.

4. Laquelle des intégrales généralisées ci-dessous converge :

A. $\int_0^1 \frac{1}{x} dx$

B. $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$

C. $\int_0^1 \frac{1}{x^2} dx$

D. $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx$

E. $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} dx$

F. Aucune des intégrales proposées.

5. Une fonction $f : X \rightarrow Y$ est surjective si et seulement si :

- | | |
|--|---|
| A. f associe à chaque élément $x \in X$ un unique élément $f(x) = y \in Y$. | D. Tout élément de Y est l'image d'au plus un élément de X . |
| B. $\forall x_1, x_2 \in X : x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$. | E. $\forall y \in Y, \exists x \in X : f(x) = y$. |
| C. f est injective et bijective. | F. Tout élément de Y est l'image d'au moins un élément de X . |

6. Soient deux fonctions $f, g :]a; b[\rightarrow \mathbb{R}$ avec $a \in \mathbb{R}$ telle que

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \text{ et } \lim_{x \rightarrow a} g(x) = K.$$

Si $\forall x \in]a; b[: g(x) > f(x)$, alors

- | | |
|---------------|--|
| A. $L \geq K$ | D. $L \leq K$ |
| B. $L > K$ | E. $L < K$ |
| C. $L = K$ | F. Aucune des autres réponses proposées. |

7. Soit la fonction

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 4 & \text{si } x < -1, \\ 2 & \text{si } -1 \leq x \leq 1, \\ -2x & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

Alors

- | | |
|---|--|
| A. La fonction f est dérivable en $x = -1$, | D. La fonction f est continue en $x = -1$, |
| B. La fonction f est dérivable mais pas continue en $x = 1$, | E. La fonction f est strictement croissante, |
| C. La fonction f est continue en $x = 1$, | F. aucune des réponses proposées |

8. La fonction

$$f(x) = \cos(x) - |x|$$

- | | |
|--|--|
| A. admet un minimum global en $x = 0$, | D. n'admet ni maximum global, ni minimum global. |
| B. admet un maximum global en $x = 0$, | E. admet un maximum local mais pas global en $x = 0$, |
| C. admet un minimum local en $x = \frac{\pi}{2}$, | F. Aucune des autres réponses proposées. |

NOM :

Prénom :

Matricule :

Section :

Partie II : Questions ouvertes

Consignes :

- L'examen commence à 13h et dure jusqu'à 17h, si vous vous asseyez et recevez une feuille d'énoncés, vous devez rester assis jusqu'à 14h.
 - Il y a deux feuilles de brouillon en fin de questionnaire, vous pouvez aussi utiliser cette feuille-ci comme brouillon.
 - Répondez dans l'espace prévu après chaque question ainsi qu'aux verso des feuilles correspondantes.
 - Toutes vos réponses doivent être soigneusement justifiées, sauf mention explicite du contraire.
 - Rédigez clairement vos réponses et soignez-en la présentation.
 - Vous pouvez rédiger vos réponses au crayon, MAIS PAS en rouge.
-

NOM :

Prénom :

Matricule :

Section :

QUESTION 1

1. (10 points) Démontrez que si une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est dérivable en $a \in \mathbb{R}$ alors elle est continue en $a \in \mathbb{R}$.
2. (3 points) Quels sont *le (plus grand) domaine et l'image* de la fonction exponentielle de base $a > 0$.
3. (6 points) Donnez le polynôme de Taylor de la fonction

$$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto 3^x$$

jusqu'à l'ordre 4 autour de $x = 0$.

4. (5 points) Démontrez par récurrence

$$\sum_{k=1}^n 2^{k-1} = 2^n - 1 \text{ pour tout } n \geq 1.$$

Réponse à la question 1

NOM :

Prénom :

Matricule :

Section :

Réponse à la question 1 (suite)

QUESTION 2

L'intégralité de cet exercice s'inscrit dans l'espace $\mathbb{R}^3$.

1. (11 points) Donnez des équations paramétriques de la droite

$$D \equiv \begin{cases} x + 2y - z &= 2 \\ 3x - 2y - z &= 0 \end{cases}$$

2. (8 points) La droite D est-elle parallèle au plan Π d'équation

$$2x - z = 7?$$

Si oui, déterminez si D se trouve dans le plan Π ou n'a pas d'intersection avec le plan Π .

Si non, donnez l'unique point d'intersection entre D et Π .

3. (6 points) Écrire l'équation du plan Π' contenant la droite D et ayant pour vecteur normal le vecteur $(-3, -2, 2)$.
-

Réponse à la question 2

NOM :

Prénom :

Matricule :

Section :

Réponse à la question 2 (suite)

QUESTION 3

Considérez la fonction réelle $f(x) = \frac{x^3}{(x-1)^2}$

1. (2 points) Donnez le (plus grand) domaine $\text{dom} f$ de f .
 2. (4 points) Montrez que $f(x) = x + 2 + \frac{3x-2}{(x-1)^2}$ pour tout $x \in \text{dom} f$.
 3. (4 points) Trouvez les première et seconde dérivées de f .
 4. (6 points) Donnez les équations de toutes les asymptotes de f .
 5. (5 points) Esquissez le graphe de f .
 6. (4 points) Sur base du graphe esquissé au point précédent, la fonction $f : \text{dom} f \rightarrow \mathbb{R}$ est-elle surjective ? (Justifiez)
-

Réponse à la question 3

NOM :

Prénom :

Matricule :

Section :

Réponse à la question 3 (suite)

QUESTION 4

1. (7 points) Donnez une expression de $\sin(3x)$ en fonction de $\sin(x)$ avec le détail des calculs intermédiaires.
2. (9 points) Calculez l'intégrale indéfinie suivante :

$$\int (t^2 + t) \cos(7t) dt.$$

3. (9 points) Calculez l'intégrale définie suivante :

$$\int_0^{\arcsin(\frac{1}{3})} \sin(x) e^{\cos(x)} dx.$$

Plus aucune fonction trigonométrique ne doit apparaître dans votre réponse.

Réponse à la question 4

NOM :

Prénom :

Matricule :

Section :

Réponse à la question 4 (suite)

