



Ex cathedra

14

20.3. Déterminez les extrema locaux et globaux des fonctions suivantes :

c. $f : \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0, y > 0, x + y < 1\} \rightarrow \mathbb{R},$
 $(x, y) \mapsto x^3 - 3y^2 + x - 2y - 1$

Pour être un extremum global, il faut d'abord être un extremum local.

ÉTAPE 1 : calculer le gradient

$$(x, y) \mapsto x^3 - 3y^2 + x - 2y - 1$$

$$\nabla f(x, y) = (3x^2 + 1, -6y - 2)$$

ÉTAPE 2 : trouver les points
 $(x, y) \in \text{dom } f$ tels que $\nabla f(x, y) = 0$

$$\text{On a } \nabla f(x, y) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 + 1 = 0 \\ -6y - 2 = 0 \end{cases}$$

Il n'existe aucun tel point puisque
 $3x^2 + 1 \geq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$

Il n'y a aucun point critique
à l'intérieur du domaine
MAIS il pourrait y en avoir
sur son bord.

Représentons-nous le domaine.

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0, y > 0, x + y < 1\}$$

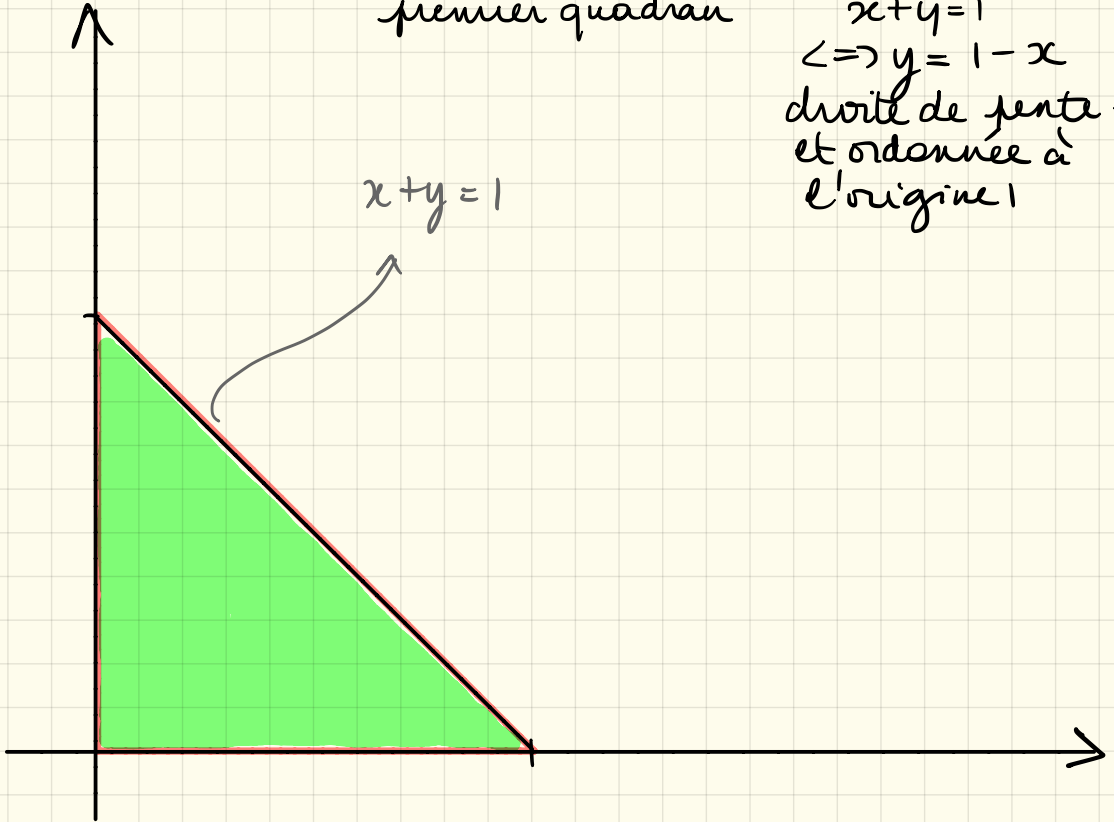
$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \underbrace{x > 0, y > 0}_{\text{premier quadrant}}, \underbrace{x + y < 1}_{x+y=1}\}$$

premier quadrant

$$x + y = 1$$

$\Leftrightarrow y = 1 - x$
droite de pente -1
et ordonnée à
l'origine 1

$$x + y = 1$$



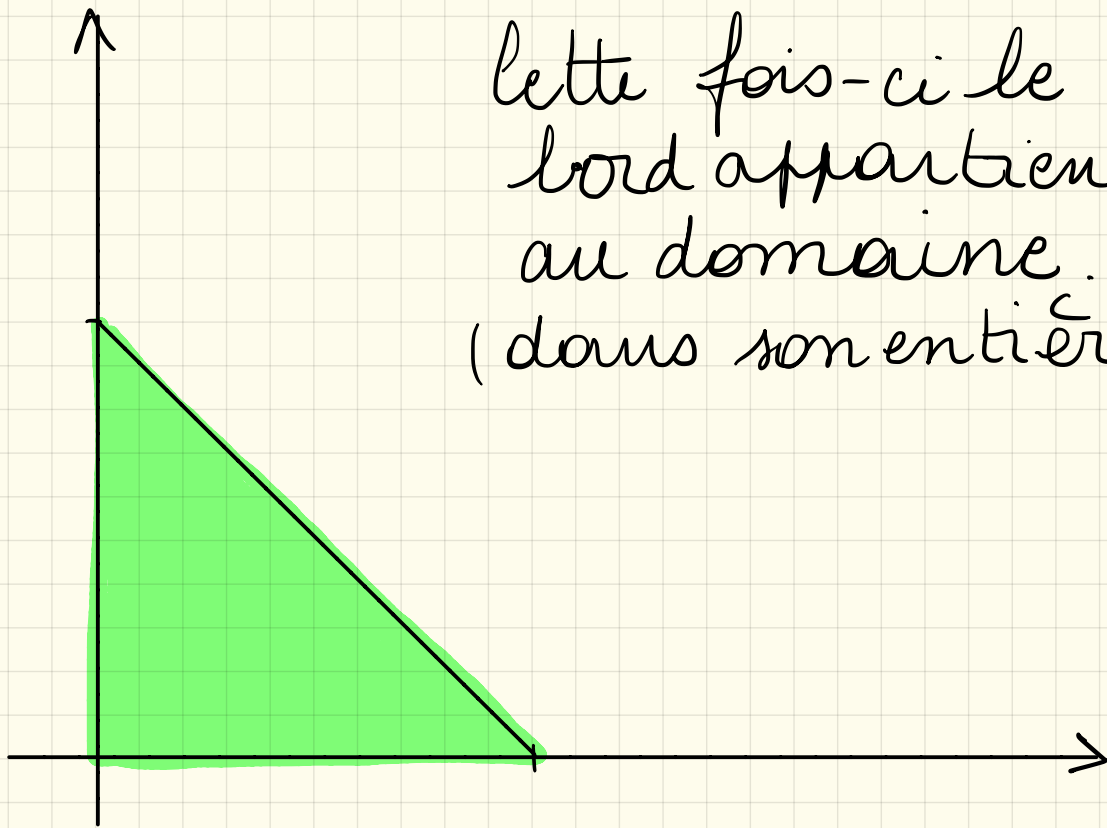
Le bord n'appartient pas
au domaine donc il ne peut
pas y avoir de point
critique (du tout).

d. $f : \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\} \rightarrow \mathbb{R},$
 $(x, y) \mapsto x^3 - 3y^2 + x - 2y - 1$

On a la même fonction,
tout dépend du domaine
Représentons-le nous

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\}$$

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\}$$



lette fois-ci le
bord appartient
au domaine.
(dans son entièreté)

Comme le domaine
est

- fermé (il contient tout son bord) et
- borné (il est "limité")

la fonction doit atteindre
un maximum et un
minimum (globaux) sur son
domaine.

Comme ces extremas ne peuvent pas être atteints à l'intérieur du domaine, ils doivent être atteints sur le bord.

20.3d

Analysons le comportement de f sur les points du bord du domaine.

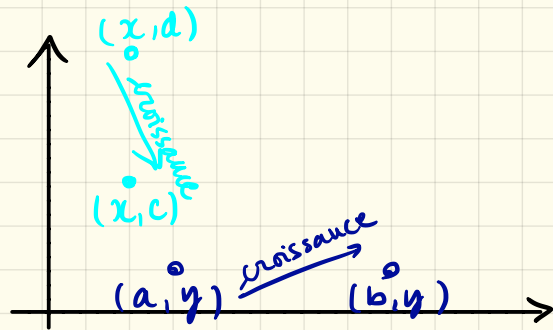
On a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 3x^2 + 1 > 0 \text{ quand } x \geq 0$$

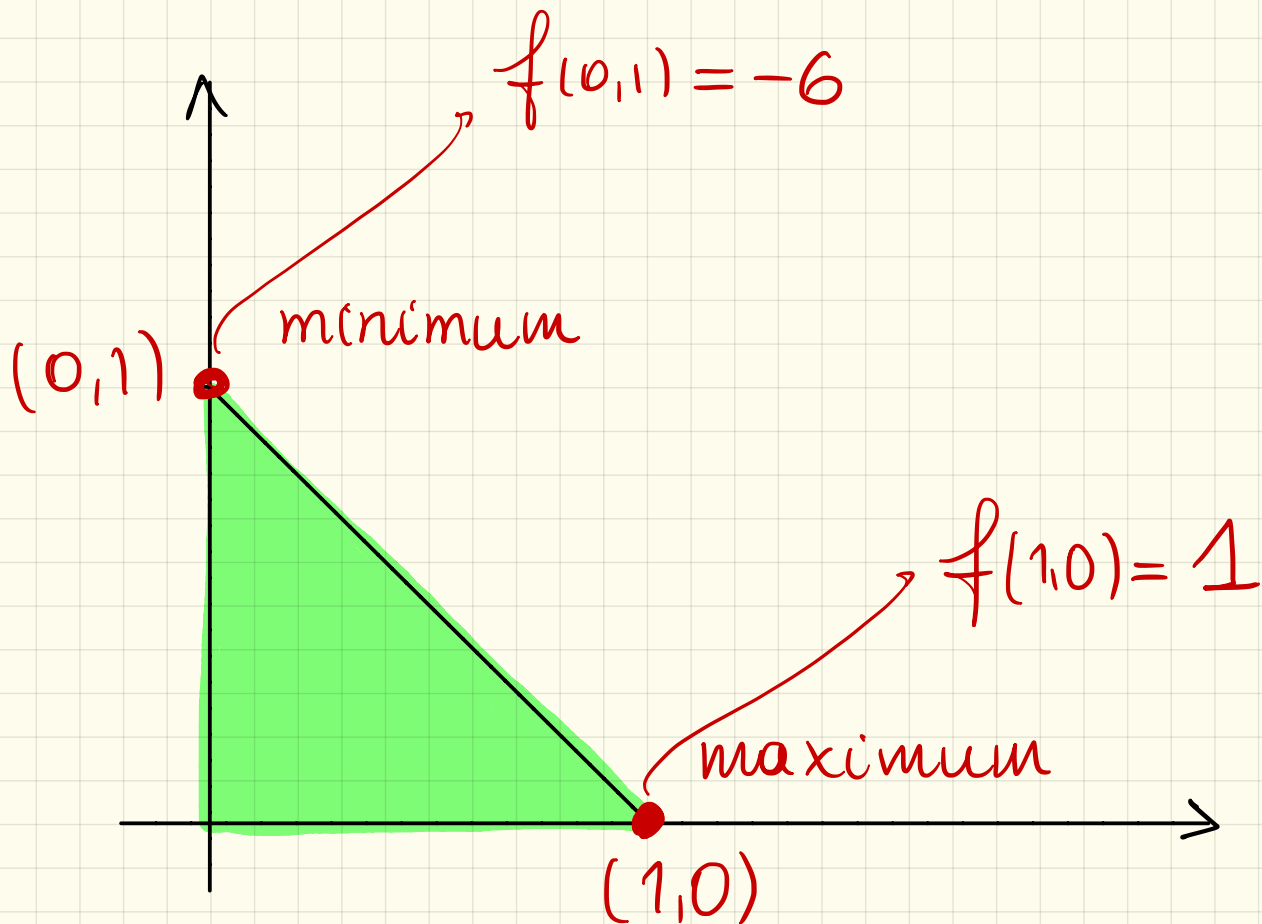
$$\text{et } \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -6y - 2 < 0 \text{ quand } y \geq 0$$

Sur notre domaine, la dérivée partielle première de f en x est strictement croissante donc $f(a, y) < f(b, y)$ quand $a < b$

20.3 d
De même, la dérivée partielle première de f en y est strictement négative donc $f(x, c) > f(x, d)$ quand $c < d$



Plus on est en bas à droite, plus la valeur de la fonction augmente.



19.2.

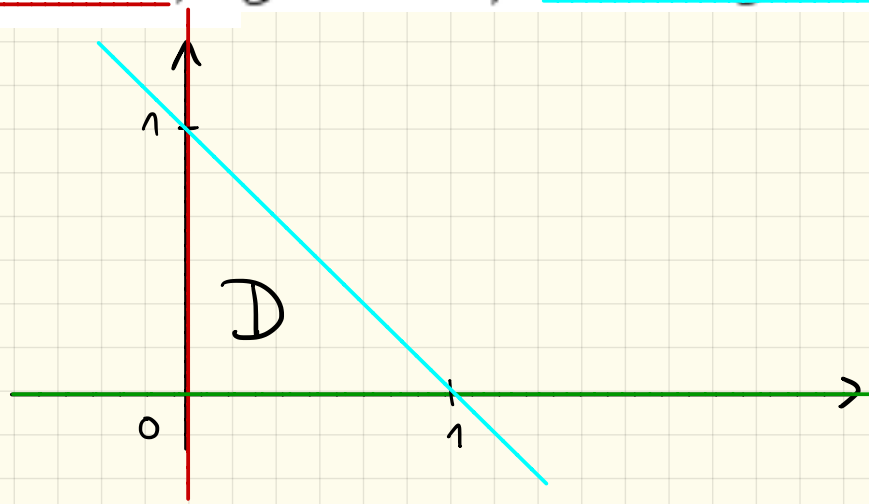
AVANT

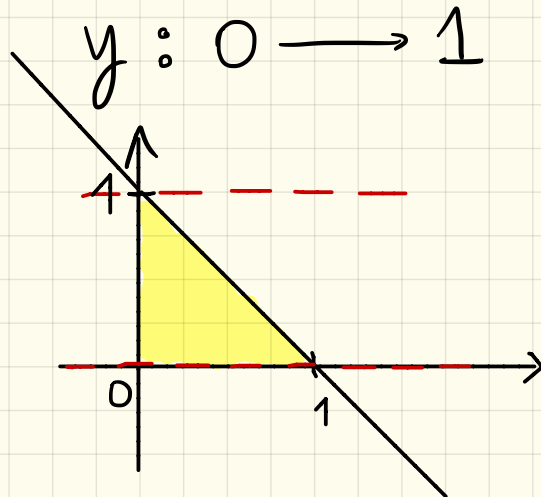
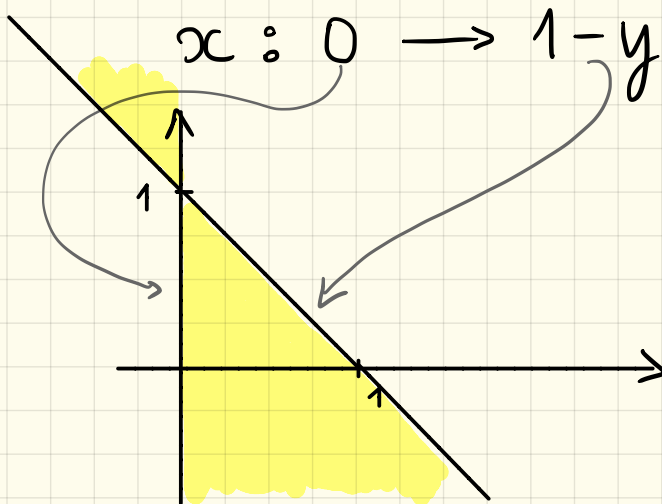
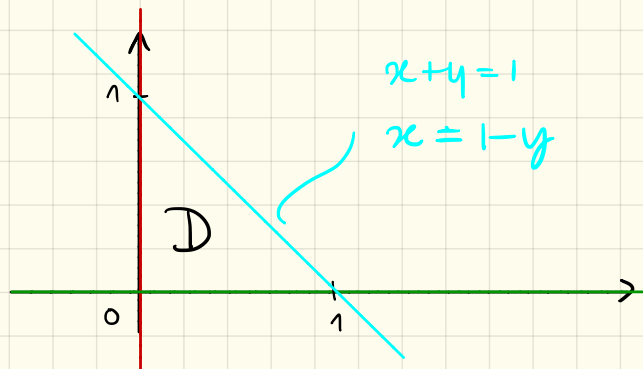
c. $\iint_D (x + y)^2 \, dx \, dy,$

où D est la région bornée du plan

délimitée par les trois droites d'équations respectives

$x = 0$, $y = 0$, $x + y = 1$;





$$\iint_D (x+y)^2 dx dy$$

$$= \int_0^1 \int_0^{1-y} (x^2 + 2xy + y^2) dx dy$$

$$= \int_0^1 \left[\frac{x^3}{3} + yx^2 + xy^2 \right]_{x=0}^{1-y} dy$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{(1-y)^3}{3} + y(1-y)^2 + (1-y)y^2 - (0+0+0) \right) dy$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{1 - 3y + 3y^2 - y^3}{3} + y(1 - 2y + y^2) + y^2 - y^3 \right) dy$$

$\frac{1}{3} - y + y^2 - \frac{1}{3}y^3$

$$= \int_0^1 \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3} y^3 \right) dy$$

$$= \frac{1}{3} \int_0^1 (1 - y^3) dy$$

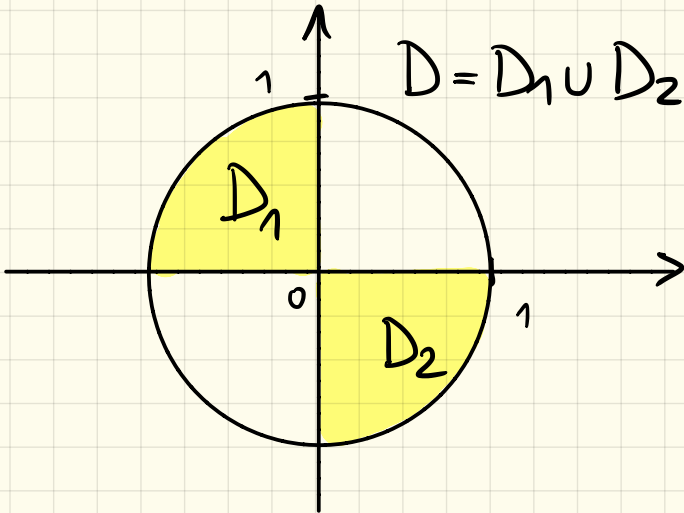
$$= \frac{1}{3} \left[y - \frac{y^4}{4} \right]_{y=0}^1$$

$$= \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{4} - (0 - 0) \right)$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

k. $\iint_D \sqrt{1-x^2-y^2} \, dx \, dy$,
 où D est défini par $xy < 0$ et $x^2 + y^2 \leq 1$. disque

xy est négatif quand
 x et y sont de signes opposés



$$D = D_1 \cup D_2$$

$$\iint_D \sqrt{1-x^2-y^2} \, dx \, dy$$

$$= \iint_{D_1} \sqrt{1-x^2-y^2} \, dx \, dy + \iint_{D_2} \sqrt{1-x^2-y^2} \, dx \, dy$$

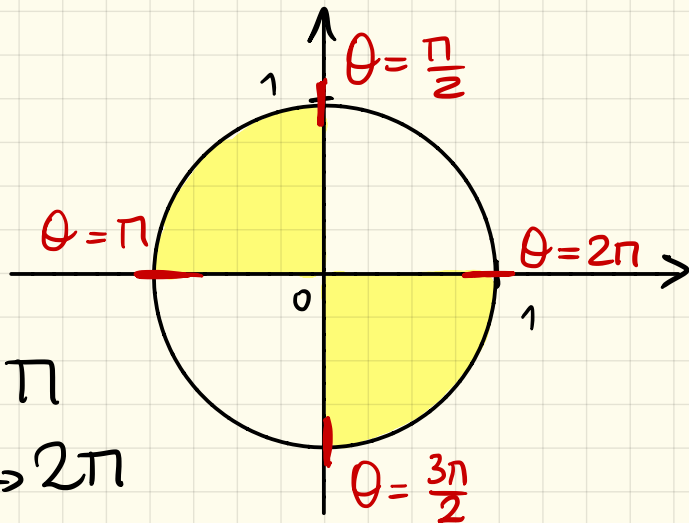
Description de D_1 et D_2 en coordonnées polaires :

$$\rho : 0 \rightarrow 1$$

et

$$\text{pour } D_1, \theta : \frac{\pi}{2} \rightarrow \pi$$

$$\text{pour } D_2, \theta : \frac{3\pi}{2} \rightarrow 2\pi$$



Il n'est pas possible, cette fois, de s'en sortir avec une seule intégrale (θ prend des valeurs dans deux intervalles séparés).

$$\iint_{D_1} \sqrt{1-x^2-y^2} \, dx \, dy$$

$$= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \int_0^1 \sqrt{1-\rho^2} \, \rho \, d\rho \, d\theta$$

$\underline{\underline{L}}$ coordonnées polaires

$$\int \sqrt{1-\rho^2} \, \rho \, d\rho = -\frac{1}{2} \int \sqrt{u} \, du = -\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} + \text{const}$$

$u = 1-\rho^2 \quad \leftarrow$
 $du = -2\rho \, d\rho$

$$= -\frac{1}{3} u^{\frac{3}{2}} + \text{const} = -\frac{1}{3} (1-\rho^2)^{\frac{3}{2}} + \text{const}$$

$$= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \left[-\frac{1}{3} (1-\rho^2)^{\frac{3}{2}} \right]_{\rho=0}^1 d\theta$$

$$= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \left(0 - \left(-\frac{1}{3} \right) \right) d\theta$$

$$= \frac{1}{3} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} d\theta$$

$$= \frac{1}{3} \left(\pi - \frac{\pi}{2} \right)$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{6}$$

$$\begin{aligned}& \iint_{D_2} \sqrt{1-x^2-y^2} \, dx \, dy \\&= \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \int_0^1 \sqrt{1-\rho^2} \, \rho \, d\rho \, d\theta \\&= \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \left[-\frac{1}{3} (1-\rho^2)^{\frac{3}{2}} \right]_{\rho=0}^1 d\theta \\&= \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \left(0 - \left(-\frac{1}{3}\right) \right) d\theta \\&= \frac{1}{3} \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} d\theta = \frac{1}{3} \left(2\pi - \frac{3\pi}{2} \right) = \frac{\pi}{6}\end{aligned}$$

$$\iint_D \sqrt{1-x^2-y^2} \, dx dy$$

$$= \iint_{D_1} \sqrt{1-x^2-y^2} \, dx dy + \iint_{D_2} \sqrt{1-x^2-y^2} \, dx dy$$

$$= \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6} = \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$$

19.1. Donner la valeur des intégrales suivantes :

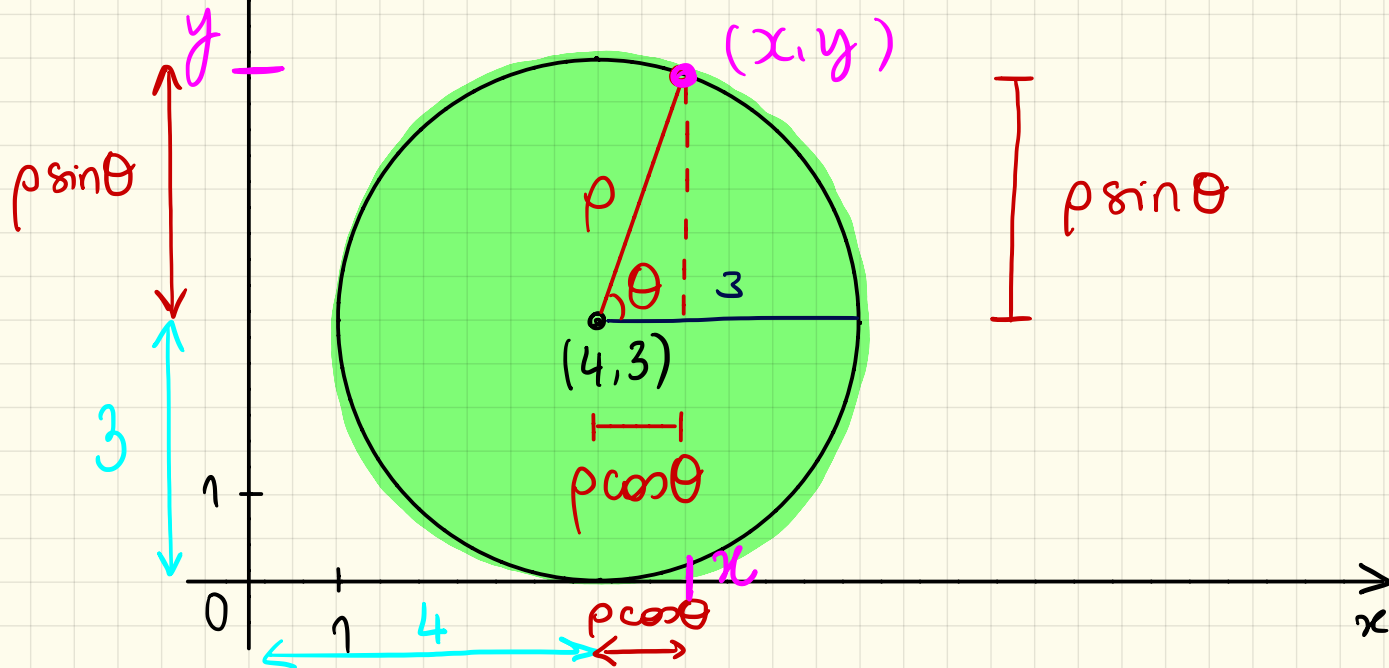
c. $\iint_D dx dy,$

où $D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ t.q. } (x - 4)^2 + (y - 3)^2 \leq 9 \right\};$

domaine circulaire
qui nous inspire un
changement de variables
vers des ... coordonnées polaires?
Pas tout à fait ...

$$D = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ t.q. } (x - 4)^2 + (y - 3)^2 \leq 9 \} ;$$

$$(x, y) = (4 + \rho \cos \theta, 3 + \rho \sin \theta)$$



Changement de variables :

$$F: [0,3] \times [0,2\pi[\rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(p, \theta) \mapsto (4 + \overset{\textcolor{violet}{x(p,\theta)}}{\underset{||}{p \cos \theta}}, 3 + \overset{\textcolor{violet}{y(p,\theta)}}{\underset{||}{p \sin \theta}})$$

$$|\det \text{Jac } F(p, \theta)| = \left| \det \begin{pmatrix} \cos \theta & -p \sin \theta \\ \sin \theta & p \cos \theta \end{pmatrix} \right|$$

$$= |p \cos^2 \theta + p \sin^2 \theta| = |p| = p$$

$$\begin{aligned} & \text{Jac } F(p, \theta) \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial p} & \frac{\partial F_1}{\partial \theta} \\ \frac{\partial F_2}{\partial p} & \frac{\partial F_2}{\partial \theta} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\iint_D dx dy = \int_0^{2\pi} \int_0^3 \overset{|\det \text{Jac } F(\rho, \theta)|}{\rho} d\rho d\theta \quad 19.1c$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[\frac{\rho^2}{2} \right]_{\rho=0}^3 d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{9}{2} d\theta = \frac{9}{2} \int_0^{2\pi} 1 d\theta$$

$$= \frac{9}{2} (2\pi - 0) = 9\pi.$$

intégrale de 1 $\leadsto$ différence
des bornes
 $2\pi - 0$

Cohérent : Aire du disque D
 $\pi \cdot 3^2 = 9\pi.$

19.4. Soit S la surface de $\mathbb{R}^3$ d'équation $z = 2 - x^2 - y^2$.
Faites un schéma de cette surface
en dessinant aussi le système d'axes.
Calculez ensuite le volume de la région
située entre le plan d'équation $z = 0$ et la surface S ,
au dessus du plan $z = 0$.

Lignes de niveau de $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto 2 - x^2 - y^2$:

$$2 - x^2 - y^2 = C \in \mathbb{R}$$

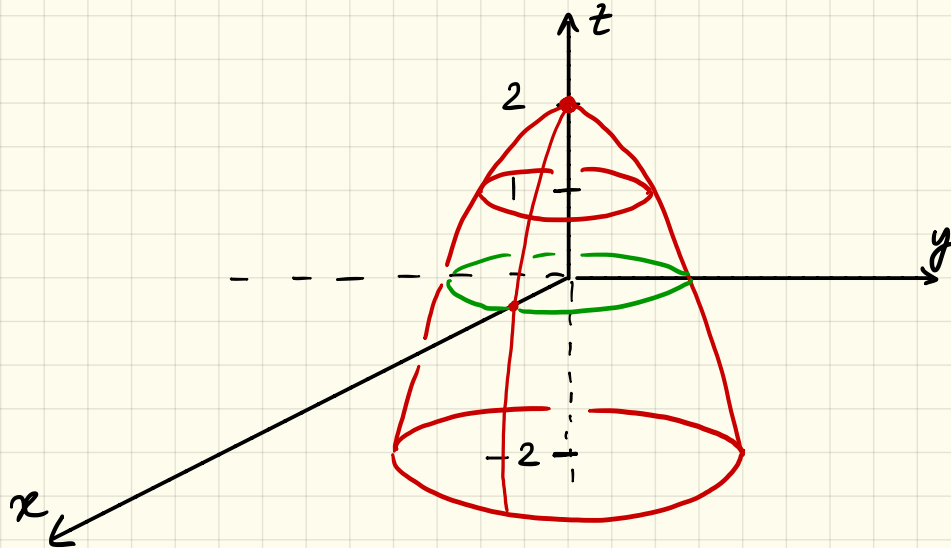
$$\Leftrightarrow \underbrace{x^2 + y^2}_{\geq 0} = 2 - C \quad \rightarrow \text{Cercle de rayon } \sqrt{2 - C}$$

$$\text{On doit avoir } 2 - C \geq 0 \Leftrightarrow C \leq 2$$

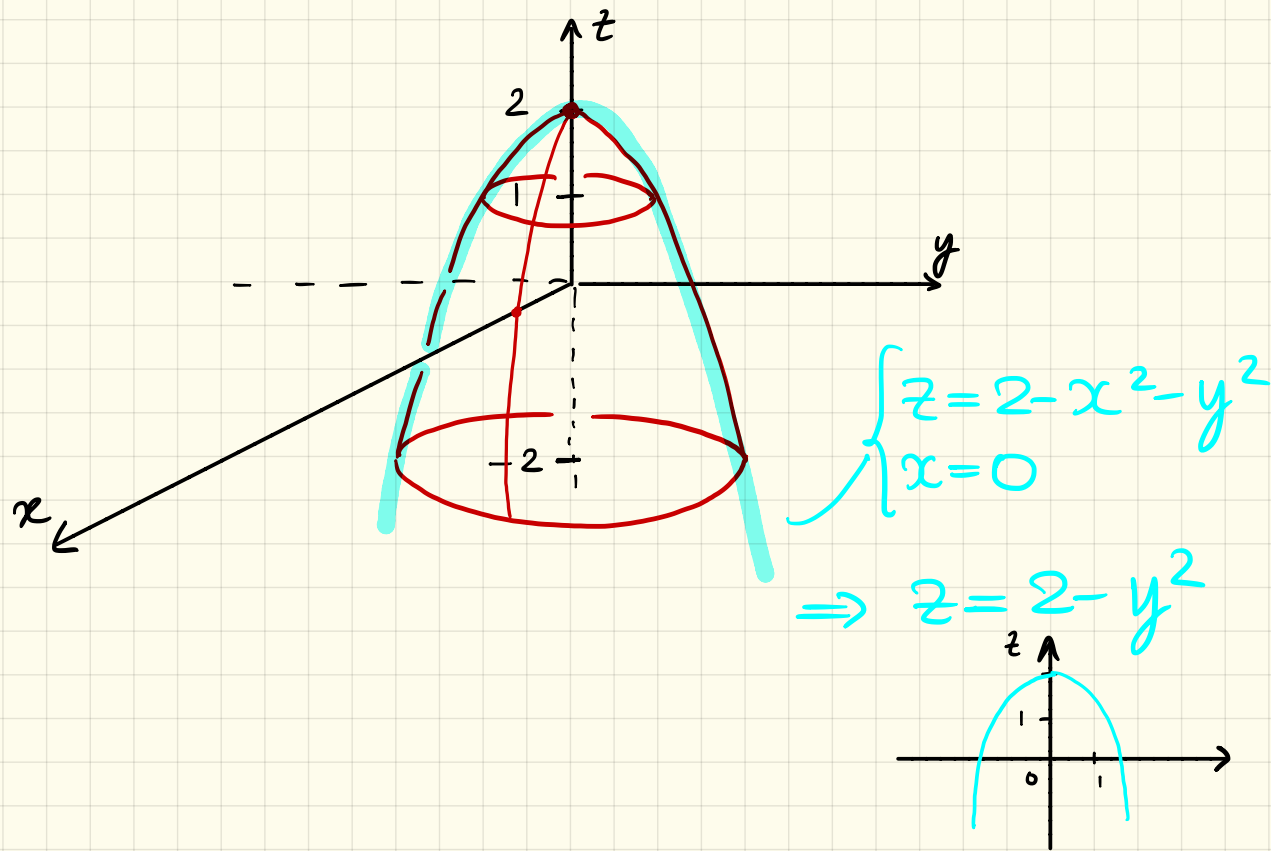
$$C = 2 : x^2 + y^2 = 0 \rightarrow \text{point } (0,0)$$

$$C = 1 : x^2 + y^2 = 1 \rightarrow \text{cercle de rayon } 1$$

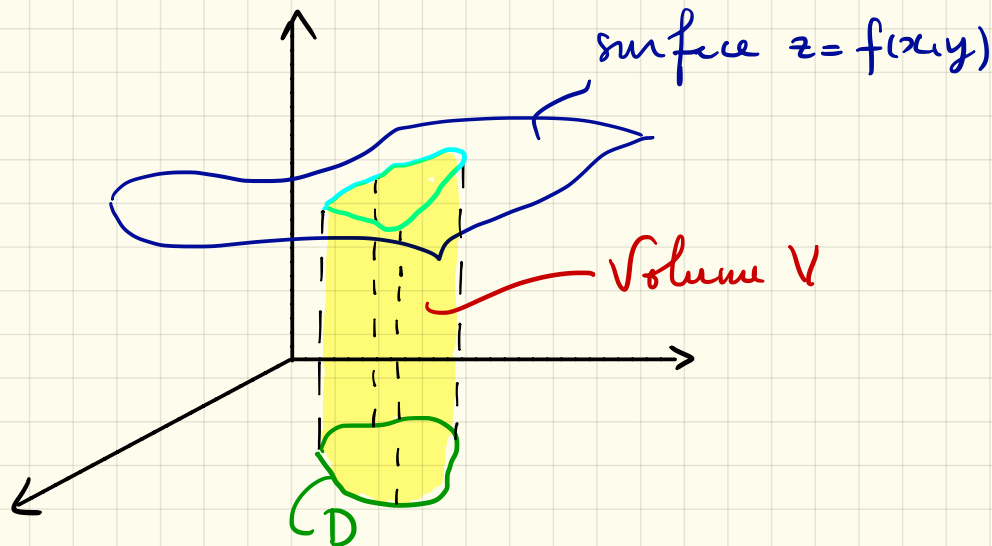
$$C = -2 : x^2 + y^2 = 4 \rightarrow \text{cercle de rayon } 2$$



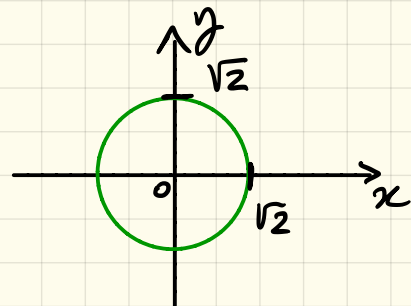
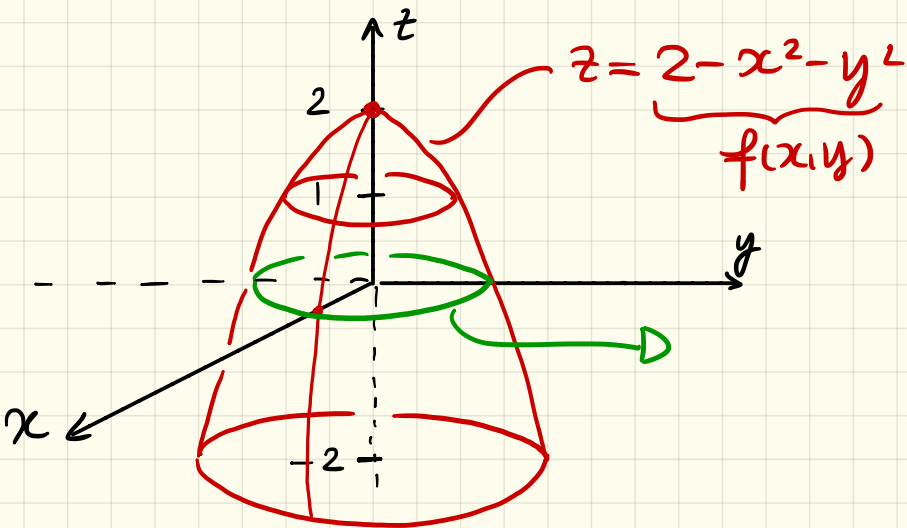
$$C = 0 : x^2 + y^2 = 2 \rightarrow \text{cercle de rayon } \sqrt{2} \approx 1.4$$



Volume situé sous une surface d'équation
 $z = f(x, y)$ et au dessus d'un domaine
 $D \subseteq \mathbb{R}^2$



$$\iint_D f(x, y) \, dx \, dy$$



Description de D
en coordonnées polaires:
 $\rho: 0 \rightarrow \sqrt{2}$
 $\theta: 0 \rightarrow 2\pi$

$$\begin{aligned} \text{Volume recherché} &= \iint_D (2 - \underbrace{x^2 + y^2}_{-\rho^2}) dx dy \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{2}} (2 - \rho^2) \rho d\rho d\theta \end{aligned}$$

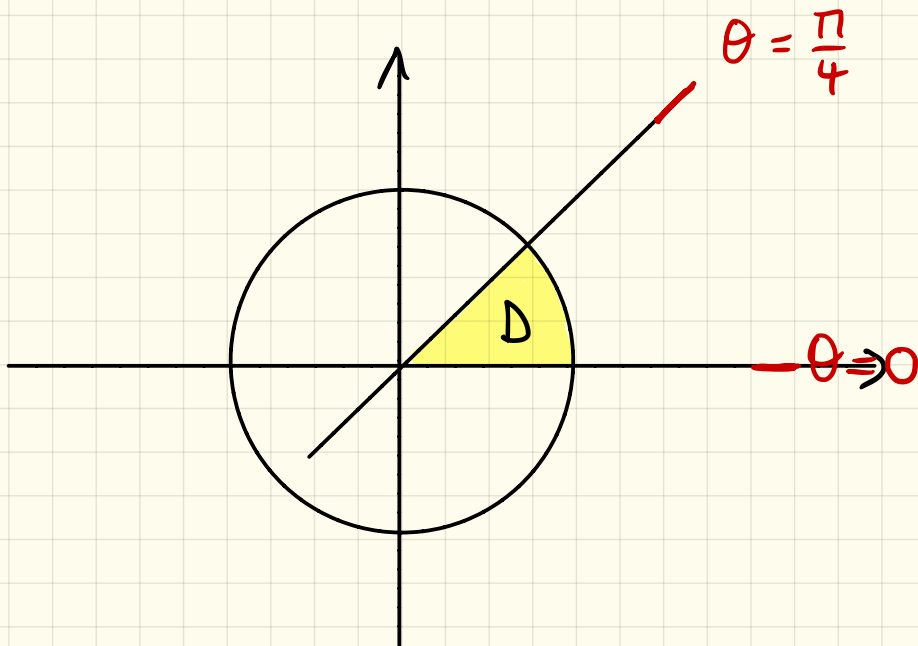
(coordonnées polaires)

$$\begin{aligned}& \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{2}} (2\rho - \rho^3) \, d\rho \, d\theta \\&= \int_0^{2\pi} \left[\rho^2 - \frac{\rho^4}{4} \right]_{\rho=0}^{\sqrt{2}} d\theta \\&= \int_0^{2\pi} \left(2 - \frac{4}{4} - 0 \right) d\theta \\&= \int_0^{2\pi} d\theta \\&= 2\pi - 0 = 2\pi\end{aligned}$$

19.5. Calculer, à l'aide d'une intégrale double, l'aire de la région bornée de $\mathbb{R}^2$

d. délimitée par les droites d'équations $\theta = 0$ et $\theta = \frac{\pi}{4}$ en coordonnées polaires,

ainsi que par l'arc de cercle de rayon 1 centré à l'origine et intercepté par ces deux droites.



$$\begin{aligned}\text{Aire de } D &= \iint_D dx dy \\&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^1 \rho d\rho d\theta \\&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[\frac{\rho^2}{2} \right]_{\rho=0}^1 d\theta = \frac{1}{2} \\&= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \\&= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\pi}{4} - 0 \right) \\&= \frac{\pi}{8}\end{aligned}$$

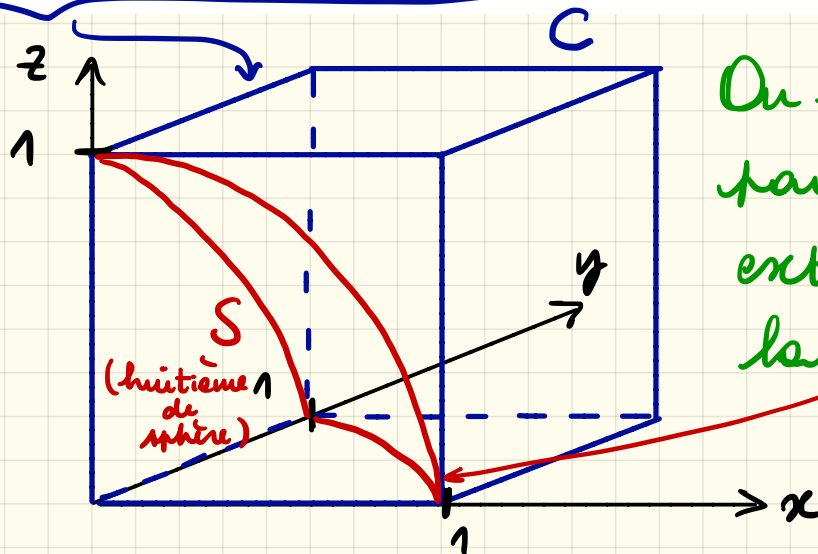
19.7. Déterminer

c. $\iiint_D dx \, dy \, dz,$

si $D = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ t.q.}$

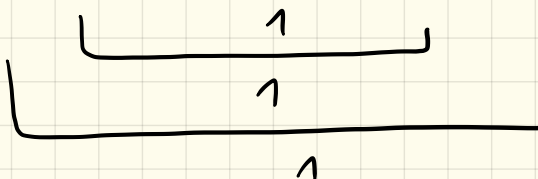
$0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1$ et $x^2 + y^2 + z^2 \geq 1 \}$.

$$D = C \setminus S$$



On est dans la
partie du cube
extérieure à
la sphère.

$$\iiint_D dx dy dz = \iiint_C dx dy dz - \iiint_S dx dy dz$$

$$\iiint_C dx dy dz = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 dx dy dz$$


$$= 1$$

Cohérent : Volume du cube

$$1 \times 1 \times 1 = 1$$

$$\iiint_S dx dy dz$$

19.7 c

Changement de variables:

$$]0, +\infty[\times [0, 2\pi[\times [0, \pi]$$

$$(\rho, \theta, \phi)$$

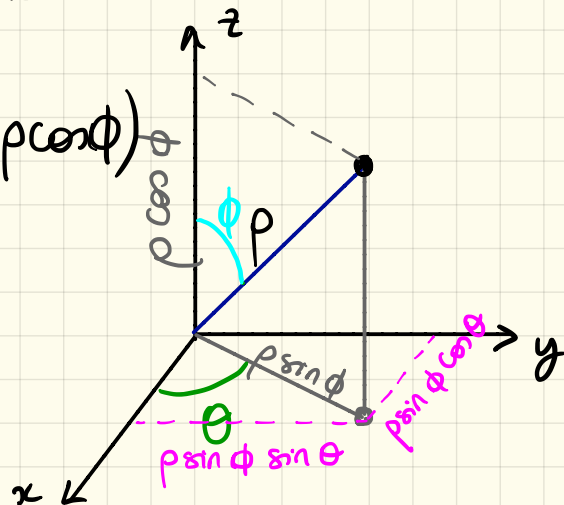
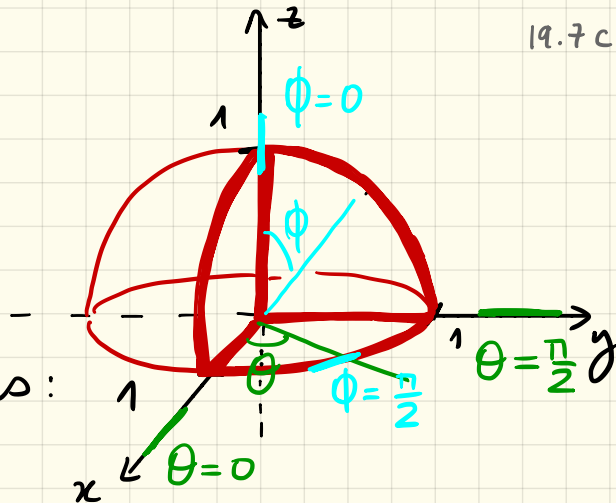
$$\xrightarrow{F} (\rho \sin \phi \cos \theta, \rho \sin \phi \sin \theta, \rho \cos \phi)$$

Description de S:

$$\rho : 0 \rightarrow 1$$

$$\theta : 0 \rightarrow \frac{\pi}{2}$$

$$\phi : 0 \rightarrow \frac{\pi}{2}$$



$$\rightarrow (\rho \sin \phi \cos \theta, \rho \sin \phi \sin \theta, \rho \cos \phi)$$

19.7 c

$$|\det \text{Jac } F(\rho, \theta, \phi)|$$

$$= \left| \det \begin{pmatrix} \sin \phi \cos \theta & -\rho \sin \phi \sin \theta & \rho \cos \phi \cos \theta \\ \sin \phi \sin \theta & \rho \sin \phi \cos \theta & \rho \cos \phi \sin \theta \\ \cos \phi & 0 & -\rho \sin \phi \end{pmatrix} \right|$$

gradient de F_1

développement du déterminant

$$= \left| \cos \phi \left(-\rho^2 \cos \phi \sin \phi \sin^2 \theta - \rho^2 \cos \phi \sin \phi \cos^2 \theta \right) - \rho \sin \phi \left(\rho \sin^2 \phi \cos^2 \theta + \rho \sin^2 \phi \sin^2 \theta \right) \right|$$

$$= \left| -\rho^2 \cos^2 \phi \sin \phi (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) - \rho^2 \sin^3 \phi (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) \right|$$

$$= \left| -\rho^2 \sin \phi (\cos^2 \phi + \sin^2 \phi) \right| = \rho^2 |\sin \phi|$$

$\downarrow$
 $0 \leq \phi \leq \pi$
 $\Rightarrow \sin \phi \geq 0$

$$\begin{aligned}
& \iiint_S dx dy dz \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 \rho^2 \sin \phi \, d\rho \, d\theta \, d\phi \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{\rho^3}{3} \sin \phi \right]_{\rho=0}^1 d\theta \, d\phi \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{3} \sin \phi \right) d\theta \, d\phi = \frac{1}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \phi \, d\theta \, d\phi \\
&= \frac{1}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi}{2} - 0 \right) \sin \phi \, d\phi = \frac{\pi}{6} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \phi \, d\phi \\
&= \frac{\pi}{6} \left[-\cos \phi \right]_{\phi=0}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{6} (0 - (-1)) = \frac{\pi}{6}
\end{aligned}$$

Cohérent :

19.7 c

Volume du $\frac{1}{8}$ ^e
de sphère = $\frac{1}{8} \cdot \frac{4\pi}{3} = \frac{\pi}{6}$

Formule
volume
sphère :
 $\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot \text{rayon}^3$

$$\begin{aligned}\iiint_D dx dy dz &= \iiint_C dx dy dz - \iiint_S dx dy dz \\ &= 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}.\end{aligned}$$