

The background of the slide is a repeating pattern of triangles in four colors: teal, lime green, coral, and dark grey. The triangles are arranged in a complex, interlocking geometric pattern.

Ex cathedra

15

21.1. Effectuer les opérations

$$\text{a)} \quad (1 + i) + (3 - 2i) - 4i;$$

$$= (1 + 3) + (i - 2i - 4i)$$

$$= 4 - 5i$$

partie
réelle

partie
imaginaire

$$i) \quad \left(\frac{1-i}{1+i} \right)^{10}.$$

$$= \left(\frac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)} \right)^{10} = \left(\frac{1-2i+i^2}{1-i^2} \right)^{10}$$

$$= \left(\frac{1-2i+(-1)}{1-(-1)} \right)^{10} = \left(\frac{-2i}{2} \right)^{10} = (-i)^{10}$$

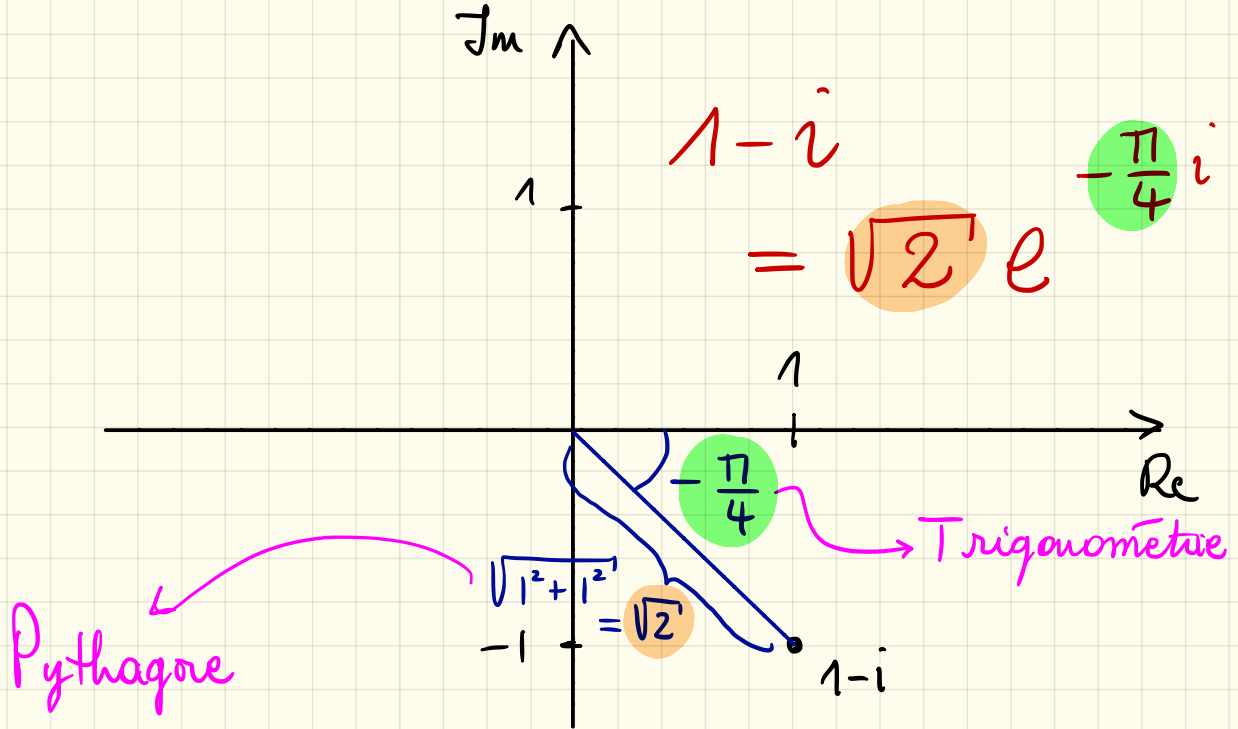
$$= i^{10} = (i^2)^5 = (-1)^5 = -1$$

Ici il est facile de calculer la 10^e puissance de notre complexe (parce qu'il est imaginaire

pure, on aurait eu autant, voire plus, de facilité s'il avait été réel). Lorsque le complexe a une partie réelle et une partie imaginaire toutes deux non-nulles, il vaut mieux passer en coordonnées polaires:

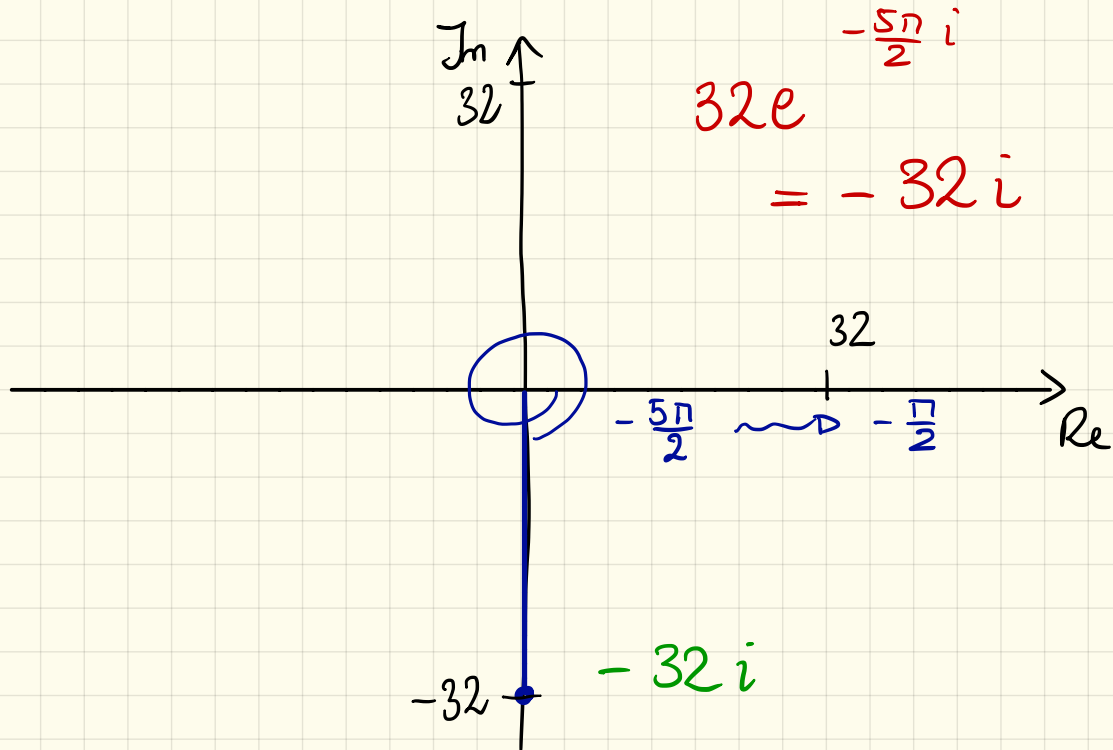
Exemple: calcul de $(1-i)^{10}$

Mise sous forme polaire



$$\begin{aligned}(1-i)^{10} &= \left(\sqrt{2} e^{-\frac{\pi}{4}i}\right)^{10} \\&= (\sqrt{2})^{10} e^{10 \cdot (-\frac{\pi}{4}i)} \\&= 2^5 e^{-\frac{5\pi}{2}i} \\&= 32 e^{-\frac{5\pi}{2}i}\end{aligned}$$

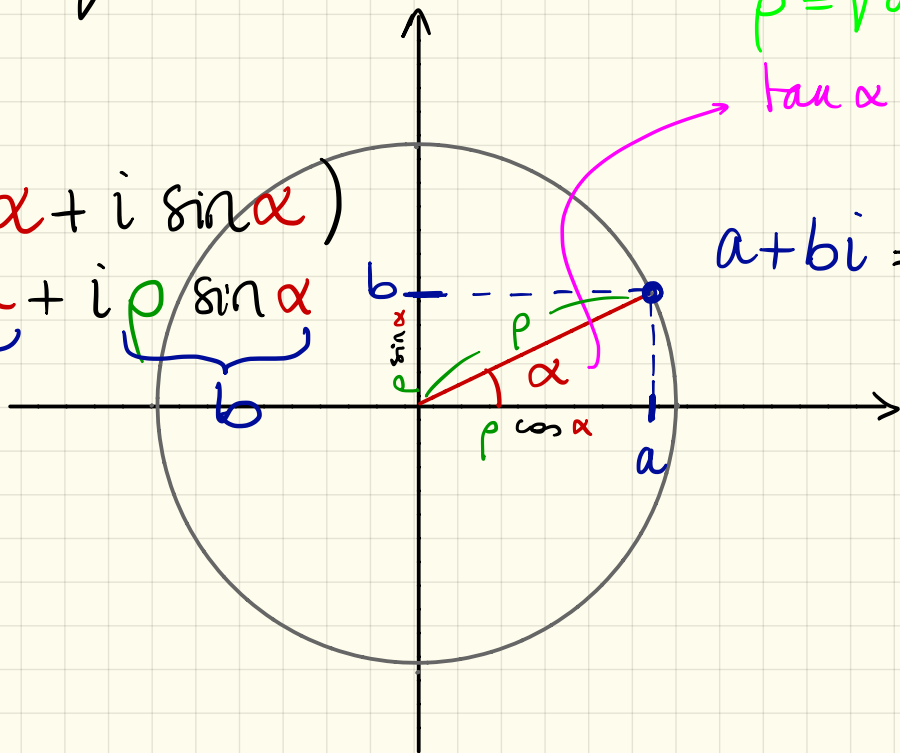
Mise sous forme cartésienne :



$$\begin{aligned} 32 e^{-\frac{5\pi}{2} i} &= 32 e^{-\frac{\pi}{2} i} \\ &= -32 \end{aligned}$$

En général :

$$\begin{aligned} &= \rho e^{i\alpha} \\ &= \rho (\cos \alpha + i \sin \alpha) \\ &= \underbrace{\rho \cos \alpha}_a + i \underbrace{\rho \sin \alpha}_b \end{aligned}$$



$$\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\tan \alpha = \frac{b}{a}$$

$$a + bi = \rho e^{i\alpha}$$

21.3. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes.

k) $x^4 - 3x^2 - 4 = 0.$

Posons $t = x^2$. On obtient

$$t^2 - 3t - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow (t-4)(t+1) = 0$$

$$\Leftrightarrow t = -1 \text{ ou } t = 4$$

Si l'on avait voulu résoudre l'équation dans $\mathbb{R}$, on n'aurait pas pu avoir $x^2 = -1$. Mais, dans $\mathbb{C}$, c'est une possibilité.

On a

$$x^4 - 3x^2 - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 4)(x^2 + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 4 \text{ ou } x^2 = -1$$

$$\Leftrightarrow x = \pm 2 \text{ ou } x = \pm i$$

L'ensemble des solutions
est

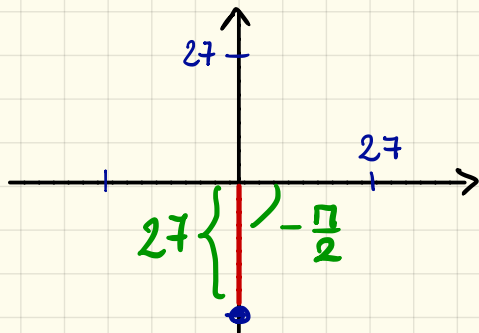
$$S = \{ \pm 2, \pm i \}$$

21.5. Calculer en se servant de la représentation polaire

8) les racines sixièmes de $-27i$.

On cherche les $z = \rho e^{i\theta}$ dans $\mathbb{C}$ tels
que $z^6 = -27i = 27 e^{(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi)i}$ ($k \in \mathbb{Z}$)

$$\rho^6 e^{i6\theta}$$



On souhaite avoir $\rho^6 = 27$
 $6\theta = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$

$$\rho^6 = 27 \Leftrightarrow \rho^2 = 3 \underset{\rho \geq 0}{\Leftrightarrow} \rho = \sqrt{3}$$

$$6\theta = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\Rightarrow \theta = -\frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{3}$$

$$k=0: \sqrt{3} e^{-\frac{\pi}{12}i} = \sqrt{3} \cos\left(-\frac{\pi}{12}\right) + \sqrt{3} \sin\left(-\frac{\pi}{12}\right) i$$

$$k=1: \theta = -\frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi+4\pi}{12} = \frac{3\pi}{12} = \frac{\pi}{4}, \sqrt{3} e^{\frac{\pi}{4}i} = \sqrt{3} \cos\frac{\pi}{4} + \sqrt{3} \sin\frac{\pi}{4} i \\ = \frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{6}}{2} i$$

$$k=2: \theta = -\frac{\pi}{12} + 2\frac{\pi}{3} = -\frac{\pi+8\pi}{12} = \frac{7\pi}{12}, \sqrt{3} e^{\frac{7\pi}{12}i} = \sqrt{3} \cos\frac{7\pi}{12} + \sqrt{3} \sin\frac{7\pi}{12} i$$

$$k=3: \theta = -\frac{\pi}{12} + 3\frac{\pi}{3} = -\frac{\pi+12\pi}{12} = \frac{11\pi}{12}, \sqrt{3} e^{\frac{11\pi}{12}i} = \sqrt{3} \cos\frac{11\pi}{12} + \sqrt{3} \sin\frac{11\pi}{12} i$$

$$k=4: \theta = -\frac{\pi}{12} + 4\frac{\pi}{3} = -\frac{\pi+16\pi}{12} = \frac{15\pi}{12} = \frac{5\pi}{4}, \sqrt{3} e^{\frac{5\pi}{4}i} = \sqrt{3} \cos\frac{5\pi}{4} + \sqrt{3} \sin\frac{5\pi}{4} i$$

$$= -\frac{\sqrt{6}}{2} - \frac{\sqrt{6}}{2} i$$

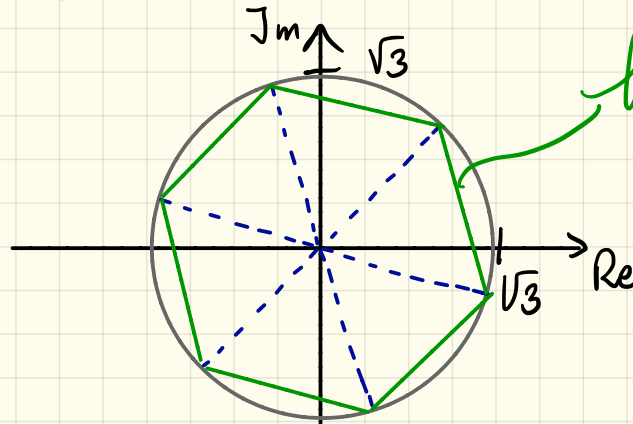
$$k=5: \theta = -\frac{\pi}{12} + 5\frac{\pi}{3} = \frac{-\pi + 20\pi}{12} = \frac{19\pi}{12}$$

$$\sqrt{3} e^{i \frac{19\pi}{12}} = \sqrt{3} \cos \frac{19\pi}{12} + \sqrt{3} \sin \frac{19\pi}{12} i$$

Représentation géométrique:

$$z_0 = \sqrt{3} e^{-\frac{\pi}{12} i}, z_1 = \sqrt{3} e^{\frac{\pi}{4} i}, z_2 = \sqrt{3} e^{\frac{7\pi}{12} i}, z_3 = \sqrt{3} e^{\frac{11\pi}{12} i},$$

$$z_4 = \sqrt{3} e^{\frac{5\pi}{4} i}, z_5 = \sqrt{3} e^{\frac{19\pi}{12} i}$$

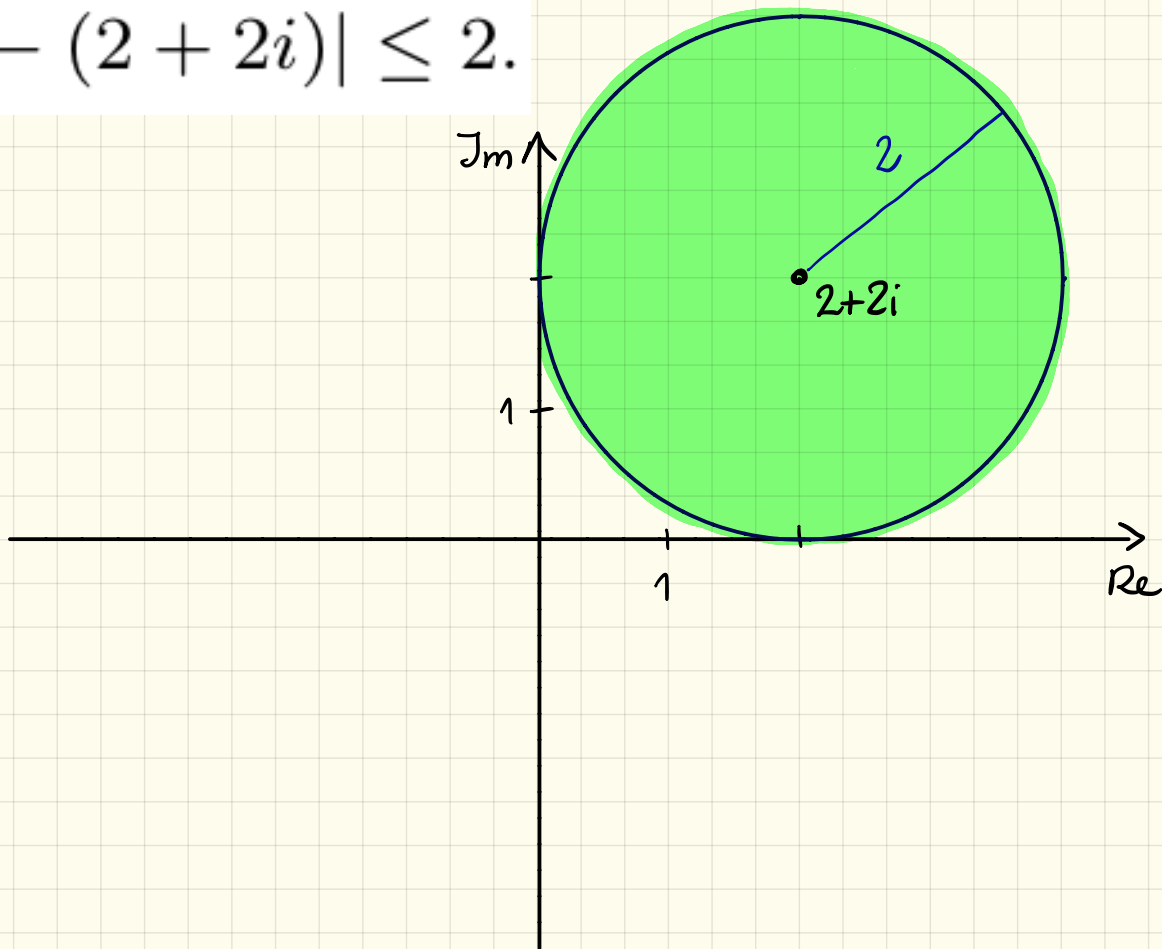


hexagone
régulier

21.6. Représenter géométriquement ces ensembles dans le plan de Gauss.

$$C = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid |z - (2 + 2i)| \leq 2 \right\}$$

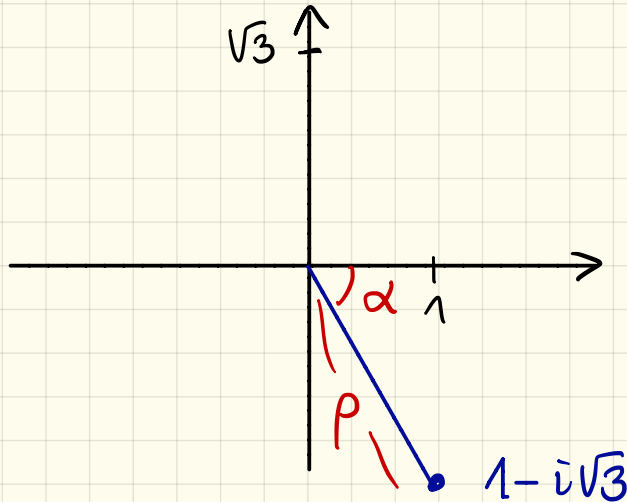
$$|z - (2 + 2i)| \leq 2.$$



21.8. Soit $z = 1 - i\sqrt{3}$.

a. Que vaut z^5 ?

$$z = 1 - i\sqrt{3} = 2e^{-\frac{\pi}{3}i}$$



$$\rho = \sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2} \\ = \sqrt{1+3} = 2$$

$$\tan \theta = \frac{-\sqrt{3}}{1} = -\sqrt{3}$$

$$\theta = -\frac{\pi}{3}$$

$$z^5 = \left(2 e^{-\frac{\pi}{3} i}\right)^5$$

$$= 2^5 e^{5 \cdot (-\frac{\pi}{3}) i}$$

$$= 32 e^{-\frac{5\pi}{3} i}$$

$$= 32 e^{\frac{\pi}{3} i}$$

$$= 32 \cos \frac{\pi}{3} + 32 i \sin \frac{\pi}{3}$$

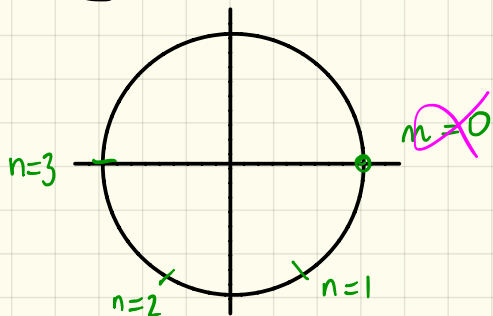
$$= \overset{16}{\cancel{32}} \cdot \frac{1}{\cancel{2}} + \overset{16}{\cancel{32}} i \frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}}$$

$$= 16 + 16\sqrt{3} i$$

b. Déterminer le plus petit nombre naturel strictement positif n tel que z^n soit réel.

$$z^n = \left(2 e^{-\frac{\pi}{3} i} \right)^n = 2^n e^{-\frac{n\pi}{3} i}$$
$$= 2^n \cos\left(-\frac{n\pi}{3}\right) + i 2^n \sin\left(-\frac{n\pi}{3}\right)$$

$$z^n \in \mathbb{R} \iff \sin\left(-\frac{n\pi}{3}\right) = 0$$



Le plus petit $n \in \mathbb{N}_{>0}$ qui satisfait cette condition est $n=3$.

c. Montrer qu'aucune puissance de z n'est imaginaire pure.

z^n est imaginaire pure lorsque sa partie réelle, à savoir $2^n \cos\left(-\frac{n\pi}{3}\right)$, est nulle

$2^n \cos\left(-\frac{n\pi}{3}\right)$ n'est jamais nul puisque $2^n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ et

$$\cos\left(-\frac{n\pi}{3}\right) = 0 \Leftrightarrow -\frac{n\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$
$$\Leftrightarrow n = -\frac{3}{2} - 3k$$

Or $-\frac{3}{2} - 3k$ avec $k \in \mathbb{Z}$ n'est jamais un nombre² naturel.