

Bonjour!

Nicolas est absent pour une durée indéterminée.

* c'est moi qui donne cette dernière séance ex cathédra
↳ William Hautekiet

* si vous avez des questions, envoyez-les
à prof. Laurent La Fuente - Gravy

+ sur l'UV, il y aura • les notes préparées par Jessica Mulpas
et Nicolas Ladelh

• les notes que je prends aujourd'hui

La suite ?

CHIM, IRBI : MATH-F115 avec Ignace Louis
et William Hautekiet
↳ moi

INFO : MATH-F114 avec Julie De Smedeleer
et Rémi Delabry

EDP aux dérivées partielles

EDO : équation différentielle ordinaire

↳ fait intervenir une fonction inconnue et ses dérivées

↳ décrit l'évolution d'une quantité

temps
espace

concentration
température population.

Par exemple :

$$(y') = y$$

où y est une fonction de t .

changement de y .

But :

- * trouver l'ensemble de toutes les solutions à l'EDO
- * trouver la solution particulière satisfaisant certaines conditions initiales (CI), comme $y(0) = 100$.
- * déduire certaines propriétés de la solution sans la déterminer explicitement.

→ infinité de solutions

→ (?)
solution unique.

Exercice 18.1

18.1. Pour quelle(s) valeur(s) réelle(s) de a l'équation différentielle en la fonction inconnue $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : t \mapsto y(t)$

$$\frac{dy}{dt}(t) = (t-a)y(t) \quad (*)$$

admet-elle la solution

$$y(t) = C e^{r(t-1)^2} \quad \leftarrow$$

où C et r sont des constantes réelles données avec $C \neq 0$?

fixé, mais inconnu.

Soit $y(t) = C e^{r(t-1)^2}$. Quand est-ce que y satisfait $(*)$? Pour quelle valeur de a ?

$$\begin{aligned} \text{On a } \frac{dy}{dt}(t) &= C e^{r(t-1)^2} \cdot (r(t-1)^2)' \\ &= \underline{C e^{r(t-1)^2} \cdot r \cdot 2(t-1)}. \end{aligned}$$

$$(t-a)y(t) = \underline{C(t-a)e^{r(t-1)^2}}$$

L'équation $(*)$ devient

$$\underbrace{C}_{\neq 0} \underbrace{2r(t-1)}_{>0} \underbrace{e^{r(t-1)^2}}_{>0} = \underline{C(t-a)e^{r(t-1)^2}} \quad \text{pour tout } t \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow 2r(t-1) = t-a \quad \text{pour tout } t \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{2rt - 2r}_{\text{polynôme}} = \underbrace{t - a}_{\text{polynôme}} \quad \text{pour tout } t \in \mathbb{R}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2r = 1 \\ -2r = -a \end{cases} \quad (**)$$

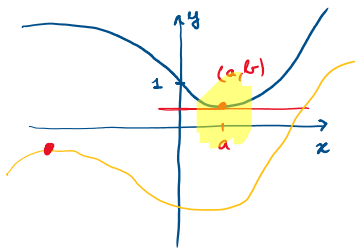
Remarque : deux polynômes avec coefficients réels sont égaux si leurs coefficients sont égaux.

$$\left[\begin{array}{ll} \text{Si } r \neq \frac{1}{2} & : \text{ aucune valeur de } a \text{ ne convient (car le système (**) est contradictoire)} \\ \text{Si } r = \frac{1}{2} & : \text{ la seule valeur de } a \text{ qui convient est } a = 1. \quad (= 2r) \end{array} \right.$$

Exercice 18.5

18.5. Sans résoudre l'équation, déterminer le lieu des points (x, y) où la solution $y = y(x)$ de l'équation différentielle $y' = xy - 1$ atteint un minimum ou un maximum. Montrer que toutes les solutions ont un graphe dans $\mathbb{R}^2$ qui coupe les axes sous un angle constant.

$$\rightarrow y'(x) = x \cdot y(x) - 1.$$



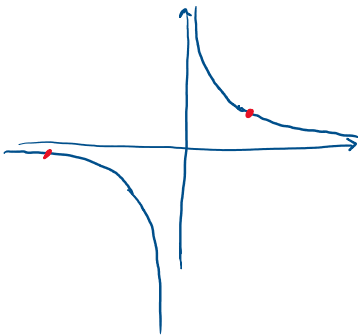
Si une fonction $y(x)$ atteint un extremum au point (a, b) , alors $\begin{cases} y(a) = b \\ y'(a) = 0. \end{cases}$ ((a, b) est sur le graphe)

Si (a, b) est un extremum, alors

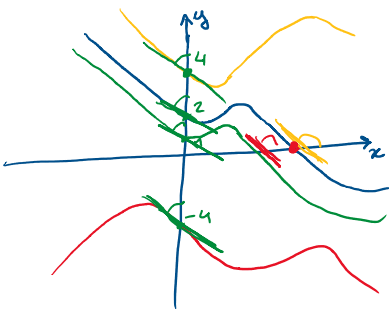
$$0 = y'(a) = a \cdot y(a) - 1 = ab - 1$$

Autrement dit, il faut que $ab = 1$ ou bien $b = \frac{1}{a}$.

Le lieu des points (a, b) qui sont un extremum de la fonction inconnue y est : une hyperbole.



18.5. Sans résoudre l'équation, déterminer le lieu des points (x, y) où la solution $y = y(x)$ de l'équation différentielle $y' = xy - 1$ atteint un minimum ou un maximum. Montrer que toutes les solutions ont un graphe dans $\mathbb{R}^2$ qui coupe les axes sous un angle constant.



L'angle avec lequel $y(x)$ coupe l'axe des y est déterminé par la pente de la tangente au point $(0, y(0))$.

Intersection d' y avec l'axe des y

La pente de la tangente à $(0, y(0))$

$$\text{est donnée par } y'(0) = 0 \cdot y(0) - 1 = -1$$

Cette pente est toujours -1

Ainsi l'angle que fait $y(x)$ avec l'axe des y est égale pour toute solution y .

Intersection d' y avec l'axe des x

On considère un point de forme

$$(x, y(x))$$

(intersection

Intersection d'y avec l'axe des x

On considère un point de forme $(x, y(x))$

(intersection avec des x)

Quelle est la pente de la tangente à ce point ?

$$y'(x) = x - y(x) - 1 = -1.$$

De même, toutes les sol. coupent l'axe des x avec la même angl.

18.9. Résoudre les équations différentielles du premier ordre à variables séparables :

donner de plus la solution particulière satisfaisant $y_0 = y(x_0)$:

a) $(1+y)dx - (1+x)dy = 0, \quad x_0 = 1, \quad y_0 = 2.$

↳ astuce de résolution :

mettre tout ce qui est y
à l'un côté, tout ce qui est x
à l'autre. Puis intégrer.

diviser
par dx

si $x=1$ alors $y=2$

$y(1) = 2$

$$(1+y) - (1+x) \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\Leftrightarrow (1+y) - (1+x)y' = 0$$

Séparer les variables

$$(1+y)dx - (1+x)dy = 0$$

$$\Leftrightarrow (1+y)dx = (1+x)dy$$

$$\Leftrightarrow \frac{(1+y)dx}{(1+x)} = dy$$

$$\Leftrightarrow \frac{dx}{(1+x)} = \frac{dy}{(1+y)}$$

On intègre les deux côtés ce qui donne

$$\int \frac{1}{(1+x)} dx = \int \frac{1}{1+y} dy$$

$$\Rightarrow \ln|1+x| + C = \ln|1+y|$$

$$\Rightarrow \ln|1+y| = \ln|1+x| + C$$

$$\begin{aligned} \exp \Rightarrow |1+y| &= e^{\ln|1+x| + C} \\ &= e^C \cdot e^{\ln|1+x|} \\ &= e^C |1+x| \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{l} |a| = |b| \\ \Leftrightarrow a = \pm b \end{array} \right)$$

$$\Rightarrow 1+y = \pm e^C (1+x)$$

$$\Rightarrow y(x) = \pm e^C (1+x) - 1$$

de l'autre côté

La solution générale :
une infinité de solutions

On cherche la sol. particulière qui satisfait $y(1) = 2$.
de l'un côté

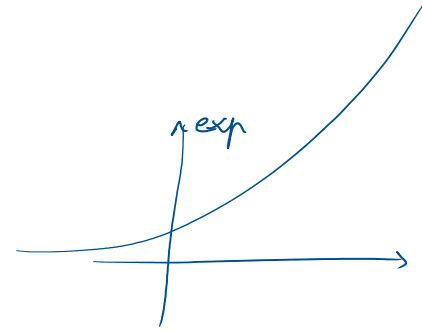
$$y(1) = \pm e^c (1+1) - 1$$

$$= \pm 2e^c - 1$$

On cherche e^c tel que $\pm 2e^c - 1 = 2$.

$$\text{donc } e^c = \pm \frac{3}{2}$$

$$\text{mais } e^c > 0 \text{ donc } e^c = \frac{3}{2}$$



Conclusion : $y(x) = \frac{3}{2}(1+x) - 1$. $\rightarrow$ solution finale
(particulière)

C'est bien de vérifier si c'est correct !

Sh

Equations de type $\underline{a}y'' + \underline{b}y' + \underline{c}y = \underline{f(x)}$ où $a, b, c \in \mathbb{R}$
 f une fonction.

Recette :

① Solution générale de l'équation homogène

$$ay'' + by' + cy = 0$$

via son polynôme caractéristique

$$\rightarrow a\lambda^2 + b\lambda + c = 0 \quad (*)$$

$$\left[\begin{array}{l} * \text{ si } \Delta = b^2 - 4ac > 0 : (*) \text{ possède 2 racines réelles } \lambda_1, \lambda_2 \\ \rightarrow y_{SGEH}(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} \end{array} \right.$$

$$\left[\begin{array}{l} * \text{ si } \Delta = 0 : (*) \text{ possède une seule racine } \lambda \\ \rightarrow y_{SGEH}(x) = (C_1 + C_2 x) e^{\lambda x} \end{array} \right.$$

$$\left[\begin{array}{l} + \text{ si } \Delta < 0 : \text{ les racines de } (*) \text{ sont complexes} \\ \rightarrow y_{SGEH}(x) = (C_1 \cos \omega x + C_2 \sin \omega x) e^{\rho x} \\ \text{où } \rho = \frac{-b}{2a}, \omega = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2a} \rightarrow \text{partie réelle de } \lambda_1, \lambda_2 \end{array} \right.$$

C_1, C_2 sont des constantes

② Trouver une solution particulière de $ay'' + by' + cy = \underline{f(x)}$
 (n'importe laquelle). $\rightarrow y_{SPEL}$

Astuce : chercher une solution qui a plus ou moins la même forme que $f(x)$ (voir ci-dessous)

③ Toute solution à $ay'' + by' + cy = f(x)$ est de forme

$$y_f(x) = y_{SPEL} + y_{SGEH} \quad \text{pour certains } C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

une famille
inférieure
de solutions

④ Trouver C_1, C_2 explicitement à l'aide des conditions initiales.

Astuces pour étape 2:

- * f polynôme et $c \neq 0$: y_{SPEL} un polynôme du même degré que f
- $c=0, b \neq 0$: y_{SPEL} un polynôme de degré $\deg f + 1$
- $b, c=0, a \neq 0$: y_{SPEL} un polynôme de degré $\deg f + 2$

$c=0, b \neq 0$: y_{SPEL} un polynôme de degré $\deg f + 2$
 $b, c=0, a \neq 0$: y_{SPEL} un polynôme de degré $\deg f + 2$

* f de forme $a e^{\beta x}$: y_{SPEL} de forme $A e^{\beta x}$ (si β n'est pas racine du polynôme caractéristique)
 $A x e^{\beta x}$ (si β est racine simple du polynôme caractéristique)
 $A x^2 e^{\beta x}$ (si β racine double du polynôme caractéristique)

* f de forme $a \sin \beta x$ ou $a \cos \beta x$:
 y_{SPEL} de forme $A \cos \beta x + B \sin \beta x$.

c) $y'' - 2y' - 3y = 2x + 1$; (*)
 $\rightarrow$ polynôme de degré 1

① On résout l'équation homogène $y'' - 2y' - 3y = 0$.

Polynôme caractéristique : $\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) = 16 > 0$$

Donc $\lambda_1 = \frac{2 - \sqrt{16}}{2} = \frac{2 - 4}{2} = -1$

$$\lambda_2 = \frac{2 + \sqrt{16}}{2} = \frac{2 + 4}{2} = 3$$

Donc $y_{\text{GÉN}}(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^{3x}$ où $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

② On cherche une solution particulière à (*):

On propose un polynôme du même degré: $y_{\text{SPEC}}(x) = px + q$ pour certains $p, q \in \mathbb{R}$ à déterminer.
 que la côté droit

alors $y'_{\text{SPEC}}(x) = p$

$$y''_{\text{SPEC}}(x) = 0$$

l'équation (*) devient: $0 - 2p - 3(px + q) = 2x + 1$ (pour tout $x \in \mathbb{R}$)

$$\Leftrightarrow \underline{-3px + (-2p - 3q)} = \underline{2x + 1}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -3p = 2 \\ -2p - 3q = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p = -\frac{2}{3} \\ -3q = 1 + 2p = 1 - \frac{4}{3} = -\frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow q = \frac{1}{9}$$

Conclusion: $y_{\text{SPEC}}(x) = -\frac{2}{3}x + \frac{1}{9}$ marche! (est solution à (*))

③ La solution générale à l'équation

est $y(x) = -\frac{2}{3}x + \frac{1}{9} + c_1 e^{-x} + c_2 e^{3x}$.

④ X

d) $y'' + 9y = 9e^{3x}$; (*)

① On résout l'équation homogène $y'' + 9y = 0$.

Polynôme caractéristique : $\lambda^2 + 9 = 0$ $\Delta = 0^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9 = -36 < 0$

$\lambda_1 = -3i$; $\lambda_2 = 3i$

$p = \frac{-b}{2a} = 0$; $\omega = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2a} = 3$

$y_{\text{GEN}}(x) = c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x$ avec $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

② On cherche une solution particulière à (*):

On propose : $y_{\text{SPEC}}(x) = Ae^{3x}$.

$y'_{\text{SPEC}}(x) = 3Ae^{3x}$

$y''_{\text{SPEC}}(x) = 9Ae^{3x}$

L'éq devient : $9Ae^{3x} + 9Ae^{3x} = 9e^{3x}$

$\Rightarrow 18A \underbrace{e^{3x}}_{>0} = 9 \underbrace{e^{3x}}_{>0}$

$\Rightarrow 18A = 9 \Rightarrow A = 1/2$

On trouve que $y_{\text{SPEC}}(x) = \frac{1}{2}e^{3x}$ est solution à (*).

③ Notre solution générale est $y(x) = \frac{1}{2}e^{3x} + c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x$

$(c_1, c_2 \in \mathbb{R})$.

j) $y'' - 5y' + 6y = -3 \sin x$; (*)

① On résout l'équation homogène $y'' - 5y' + 6y = 0$.

Polynôme caractéristique : $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$

$\Delta = 25 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 1$

$\lambda_1 = \frac{5-1}{2} = 2$

$\lambda_2 = \frac{5+1}{2} = 3$

On trouve $y_{\text{GÉN}}(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x}$
où $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

② On cherche une solution particulière à (*):

On propose : $y_{\text{SPEC}}(x) = A \cos x + B \sin x$.

A, B à déterminer

$y'_{\text{SPEC}}(x) = -A \sin x + B \cos x$

$y''_{\text{SPEC}}(x) = -A \cos x - B \sin x$

L'éq devient: $-A \cos x - B \sin x$

$(-A - 5B + 6A) \cos x + 5A \sin x - 5B \cos x + 6A \cos x + 6B \sin x = -3 \sin x$

$(5A - 5B) \cos x + (5A + 5B) \sin x = -3 \sin x$

Donc on aurait que $\begin{cases} 5A - 5B = 0 \\ 5A + 5B = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = B \\ 10A = -3 \end{cases}$

$\Rightarrow A = B = \frac{-3}{10}$

$y_{\text{SPEC}}(x) = \frac{-3}{10} \cos x - \frac{3}{10} \sin x$

Vérifier votre réponse !

18.40. Déterminer la solution particulière des équations différentielles suivantes répondant aux conditions initiales indiquées :

b) $y'' - 4y' + 4y = e^{2x} + x^2$, $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, $y'_0 = 0$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$

① On résout l'équation homogène $y'' - 4y' + 4y = 0$

poly car: $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$ $\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 4 = 0$.

$\leadsto \lambda = \frac{4}{2} = 2$. une racine double

$y_{\text{GEN}}(x) = (c_1 + c_2 x) e^{2x}$.

② Solution particulière :

On propose: $y_{\text{SPEL}}(x) = A x^2 e^{2x}$ car 2 est racine double du polynôme caractéristique.

$y'_{\text{SPEL}}(x) = \frac{A 2x e^{2x} + A x^2 \cdot 2e^{2x}}{2px + q}$

$y''_{\text{SPEL}}(x) = \frac{2A e^{2x} + 2A x \cdot 2e^{2x}}{A 4x e^{2x} + A x^2 \cdot 4e^{2x}} + 2p$

l'éq devient:

$y'' - 4y' + 4y$

$2A e^{2x} + 8A x e^{2x} + 4A x^2 e^{2x} + 2p$

$- 4 (2A x e^{2x} + 2A x^2 e^{2x} + 2px + q)$

$+ 4 (A x^2 e^{2x} + px^2 + qx + r)$

$= e^{2x} + x^2$.

$\Rightarrow \frac{2A e^{2x} + 4px^2 + (-8p + 4q)x + 4r - 4q + 2p}{= e^{2x} + x^2 + 0 \cdot x + 0}$

$\Rightarrow \begin{cases} 2A = 1 \\ 4p = 1 \\ -8p + 4q = 0 \\ 4r - 4q + 2p = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \frac{1}{2} \\ p = \frac{1}{4} \\ q = \frac{1}{2} \\ r = \frac{3}{8} \end{cases}$

③ Conclusion: solution générale est

$y_{\text{SC}}(x) = \frac{1}{2} x^2 e^{2x} + \frac{1}{4} x^2 + \frac{1}{2} x + \frac{3}{8} + (c_1 + c_2 x) e^{2x}$.

④ Imposer les conditions initiales :

On détermine c_1, c_2 à l'aide des CI $\begin{cases} y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$.

$0 = y_{\text{SC}}(0) = \frac{3}{8} + c_1 \cdot e^0 \Rightarrow c_1 = -\frac{3}{8}$

$y'_{\text{SC}}(x) = x e^{2x} + x^2 e^{2x} + \frac{1}{2} x + \frac{1}{2} + c_2 e^{2x} + 2(c_1 + c_2 x) e^{2x}$.

donc $0 = y'_{sc}(0) = \frac{1}{2} + c_2 e^0 + 2c_1 e^0$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} + c_2 - \frac{2 \cdot 3}{8} = 0$$

$$\Rightarrow c_2 = -\frac{1}{2} + \frac{6}{8} = \frac{1}{4}.$$

Conclusion : la solution finale est

$$y(x) = \frac{1}{2} x^2 e^{2x} + \frac{1}{4} x^2 + \frac{1}{2} x + \frac{3}{8} + \left(-\frac{3}{8} + \frac{1}{4} x\right) e^{2x}.$$

Exercice 18.45

18.45. Soit l'équation différentielle $y'' + 2y' + my = 12x^2e^{-x}$. (*)

- a) Déterminer la constante réelle m de manière que $y = x^4e^{-x}$ soit une solution particulière de cette équation.
 b) Déterminer ensuite, pour cette valeur de m , la solution générale.
 c) Quelle est la solution particulière qui passe par les points $(0,0)$ et $(1,1)$?

a) Si $y(x) = x^4e^{-x}$, alors $y'(x) = 4x^3e^{-x} - x^4e^{-x}$
 $y''(x) = 12x^2e^{-x} - 4x^3e^{-x} - 4x^3e^{-x} + x^4e^{-x}$

Donc l'équation (*) devient

$$\cancel{12x^2e^{-x}} - \cancel{8x^3e^{-x}} + x^4e^{-x} + \cancel{8x^3e^{-x}} - 2x^4e^{-x} + mx^4e^{-x} = \cancel{12x^2e^{-x}} \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow (m-1)x^4e^{-x} = 0 \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

$$\Leftrightarrow m = 1$$

La seule valeur pour laquelle $y(x) = x^4e^{-x}$ soit solution à (*) est $m = 1$.

b) Il faut donc $m = 1$ et on regarde l'équation

$$y'' + 2y' + y = 12x^2e^{-x}.$$

Par (a), on sait que $y_{\text{SPEC}}(x) = x^4e^{-x}$ est une solution particulière !

Cherchons la solution générale à l'équation homogène

$$y'' + 2y' + y = 0.$$

Son polynôme caractéristique est $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$ $\Delta = 0$
 $\lambda = -1$

d'où $y_{\text{SGEH}}(x) = (c_1 + c_2 x)e^{-x}$ $(c_1, c_2 \in \mathbb{R})$

Et la solution générale est $y(x) = x^4e^{-x} + (c_1 + c_2 x)e^{-x}$
 $(c_1, c_2 \in \mathbb{R})$

c) Laquelle de ces solutions passe par $(0,0)$ et $(1,1)$?

On cherche c_1, c_2 tels que $y(0) = 0$
 et $y(1) = 1$ } ainsi, le graphe de y
 va passer par
 $(0, y(0)) = (0, 0)$
 et $(1, y(1)) = (1, 1)$

On veut donc que

$$\begin{cases} 0 = y(0) = 0 \cdot e^{-0} + (c_1 + c_2 \cdot 0)e^{-0} = c_1 \\ 1 = y(1) = 1^4e^{-1} + (c_1 + c_2 \cdot 1)e^{-1} = (1 + c_1 + c_2)e^{-1} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} c_1 = 0 \\ 1 + c_2 = e \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = 0 \\ c_2 = e - 1 \end{cases}$$

La solution qui passe par $(0,0)$ et $(1,1)$ est

$$y(x) = x^4 e^{-x} + (e-1) x e^{-x}.$$