

Question 1:

- (a) (/10) Démontrer que si une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est dérivable en $a \in \mathbb{R}$ alors elle est continue en $a \in \mathbb{R}$.
- (b) (/3) Donner la définition, le (plus grand) domaine et l'image de la fonction exponentielle de base $a > 0$.
- (c) (/6) Donner le polynôme de Taylor de la fonction

$$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto 3^x$$

jusqu'à l'ordre 4 autour de $x = 0$.

d) Montrer par récurrence :

$$\sum_{k=1}^n 2^{k-1} = 2^n - 1 \quad \forall n \geq 1$$

Réponse question 1 :

(a) Comme f est dérivable,

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \text{ existe.}$$

Pour $x \neq a$, on a donc

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x) - f(a) + f(a) \\ &= \frac{f(x) - f(a)}{x - a} (x - a) + f(a) \end{aligned}$$

et donc

Réponse question 1 (suite):

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow a} f(x) &= \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f(x) - f(a)}{x - a} (x - a) + f(a) \right) \\ &= f'(a) \cdot 0 + f(a) = f(a)\end{aligned}$$

(b) La fonction exponentielle de base $a > 0$ et la fonction
 $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto a^x$

Son domaine est $\mathbb{R}$ et son image est $\mathbb{R}_0^+$.

$$\begin{aligned}(c) \quad g(x) &= 3^x \Rightarrow g(0) = 3^0 = 1 \\ g'(x) &= \ln 3 \cdot 3^x \Rightarrow g'(0) = \ln 3 \\ g''(x) &= (\ln 3)^2 \cdot 3^x \Rightarrow g''(0) = (\ln 3)^2\end{aligned}$$

$$g''(x) = (\ln 3)^3 \cdot 3^x \Rightarrow g''(0) = (\ln 3)^3$$

$$g'''(x) = (\ln 3)^4 \cdot 3^x \Rightarrow g'''(0) = (\ln 3)^4$$

Le polynôme de Taylor de g autour de 0 à l'ordre 4 est

$$T_{g,0,4}(x) = \sum_{i=0}^4 \frac{g^{(i)}(0)}{i!} x^i$$

$$= \sum_{i=0}^4 \frac{(\ln 3)^i}{i!} x^i$$

$$= 1 + \ln 3 x + \frac{(\ln 3)^2}{2} x^2 + \frac{(\ln 3)^3}{6} x^3 + \frac{(\ln 3)^4}{24} x^4$$

d) Démonstration par récurrence : $\sum_{k=1}^n 2^{k-1} = 2^n - 1$ $\forall n \geq 1$
 plus.

Étape initiale : $n=1$

$$\sum_{k=1}^1 2^{k-1} = 2^0 = 1 \Rightarrow p(1) \text{ vrai}$$

$$2^1 - 1 = 1$$

Étape de récurrence :

Ma l'implication $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ est vraie
quel que soit n .

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} 2^{k-1} &= \sum_{k=1}^n 2^{k-1} + 2^n \\ &= 2^n - 1 + 2^n \quad \left(\begin{array}{l} \text{par hyp de réc. :} \\ P(n) : \sum_{k=1}^n 2^{k-1} = 2^n - 1 \\ \text{est vraie} \end{array} \right) \\ &= 2 \cdot 2^n - 1 \\ &= 2^{n+1} - 1 \end{aligned}$$

$P(n+1)$.

Par récurrence, on a un $P(n)$ vraie $\forall n \geq 1$.

□