

Question 2

L'intégralité de cet exercice s'inscrit dans l'espace $\mathbb{R}^3$.

- (a) (/11) Donner des équations paramétriques de la droite

$$D \equiv \begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ 3x - 2y - z = 0 \end{cases}.$$

- (b) (/8) La droite D est-elle parallèle au plan Π d'équation

$$2x - z = 7 \quad ?$$

Si oui, déterminer si D se trouve dans le plan Π ou n'a pas de point d'intersection avec le plan Π . Si non, donner l'unique point d'intersection entre D et Π .

- (c) (/6) Ecrire l'équation du plan Π' contenant la droite D et ayant pour vecteur normal le vecteur $(-3, -2, 2)$.

Réponse question 2 :

(a) Vecteur normal de $x + 2y - z = 2$: $(1, 2, -1)$
 " " " $3x - 2y - z = 0$: $(3, -2, -1)$

Vecteur directeur de D :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(-1) - (-1)(-2) \\ -(1 \cdot (-1) - (-1) \cdot 3) \\ 1 \cdot (-2) - 2 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ -8 \end{pmatrix}$$

On peut prendre $(2, 1, 4)$.

Point de D : En sommant (1) $x + 2y - z = 2$
 et (2) $3x - 2y - z = 0$

Réponse question 2 (suite) :

On obtient $4x - 2z = 2$ soit $2x - z = 1$.

$$\begin{aligned}\text{Dans (1): } 2 &= x + 2y - z \\ &= x + 2y - (2x - 1) \\ &= 2y - x + 1\end{aligned}$$

$$\text{donc } 2y - x = 1 \text{ ou } 2y = x + 1$$

Si on choisit $x = 1$, on obtient $y = 1$
et donc $z = 2x - 1 = 1$

$$(1, 1, 1) \in D.$$

Equations paramétriques de D :

$$\begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = 1 + 4\lambda \end{cases} \quad (\lambda \in \mathbb{R})$$

(b) Vecteur normal de $2x - z = 7$: $(2, 0, -1)$

D est parallèle à Π

Ssi un vecteur directeur de D est orthogonal à un vecteur normal de Π

Or $(2, 1, 4)$ (voir (a)) est orthogonal à $(2, 0, -1)$ puisque

$$\begin{aligned}\langle (2, 1, 4), (2, 0, -1) \rangle &= 2 \cdot 2 + 1 \cdot 0 + 4 \cdot (-1) \\ &= 4 - 4 = 0\end{aligned}$$

Donc D est parallèle à Π .

Soit $D \subseteq \Pi$ soit $D \cap \Pi = \emptyset$.

Or $(4, 1, 1) \in D$ et $(4, 1, 1) \notin \Pi$ ($2 \cdot 1 - 1 \neq 7$)
donc $D \cap \Pi = \emptyset$.

(c) Comme

$$\langle (2, 1, 4), (-3, -2, 2) \rangle$$

$$= 2 \cdot (-3) + 1 \cdot (-2) + 4 \cdot 2$$

$$= -6 - 2 + 8 = 0,$$

Π' contiendra D si Π' contient
un point de D , $(1, 1, 1)$ par exemple.

$$\Pi' \equiv -3(x-1) - 2(y-1) + 2(z-1) = 0$$

$$\text{ou } \Pi' \equiv -3x - 2y + 2z + 3 = 0$$